Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.		
1.	Ist $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$?	**ja**
2.	Der Aufwand für die Berechnung über die Lagrange-Darstellung ist $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen.	**nein**
3.	Was ist $P(Q \mid x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6)(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 1$ für $Q = 7x^2 - 1$?	**6**
4.	Ist $P(g \mid x_0, \ldots, x_n) = g$ für alle Polynome g ?	**nein**
5.	Wird der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} \left\| P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x) \right\|$ für wachsendes n immer kleiner?	**nein**

Verständnisfragenblock 2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $Rang(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $A = Q\,R$ gilt. Weiter sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.		
1.	Ist $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$?	**ja**
2.	Kann die Matrix R durch Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmt werden?	**nein**
3.	Ist die Matrix $A\,A^T$ immer symmetrisch positiv definit?	**nein**
4.	Sei $\kappa_2(A) = 4$. Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems über Normalengleichungen muss ein Gleichungssystem der Form $Mx = f$ gelöst werden. Was ist $\kappa_2(M)$?	**16**
5.	Steht der Vektor $A\,x^\star$ stets senkrecht auf b ?	**nein**

Verständnisfragenblock 3: Es seien $A, B, P, L, R, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit P Permutationsmatrix, R obere Dreiecksmatrix, L normierte untere Dreiecksmatrix und D Diagonalmatrix.		
1.	Sei $A = LDL^T$. Ist dann stets $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$?	**nein**
2.	Es seien A, B symmetrisch positiv definit. Ist dann $A + B$ immer symmetrisch positiv definit?	**ja**
3.	Existiert für A symmetrisch positiv definit stets eine LR-Zerlegung $A = LR$?	**ja**
4.	Sei A regulär. Existiert dann stets eine LDL^T-Zerlegung, so dass $A = LDL^T$?	**nein**
5.	Es sei $\kappa_2(A) = 5$ und $PA = LR$. Was ist $\kappa_2(P)$?	**1**

Verständnisfragenblock 4: Wir betrachten Nullstellenprobleme.		
1.	Beim Sekantenverfahren wird die Steigung der Funktion durch einen Differenzenquotienten approximiert.	**ja**
2.	Ist die Newton-Methode immer global quadratisch konvergent?	**nein**
3.	Für eine quadratische Funktion liefert das Newton-Verfahren für beliebige Startwerte die Lösung nach einer Iteration	**nein**
4.	Wie viele LR-Zerlegungen müssen für die Durchführungen von 4 Schritten des Newton-Verfahrens (für Systeme) berechnet werden, wenn alle auftretenden Gleichungssysteme mittels LR-Zerlegung gelöst werden?	**4**
5.	Das vereinfachte Newtonverfahren benötigt keine Ableitungen.	**nein**

Verständnisfragenblock 5: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	Was ist x_{MAX} in $\mathbb{M}(7,2,-1,2)$?	48
2.	Was ist x_{MIN} in $\mathbb{M}(7,2,-1,2)$?	$\frac{1}{49} = 0.020408...$
3.	Was ist die relative Konditionszahl $\kappa_{rel}(x)$ für die Auswertung der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ an der Stelle $x = 0.9$?	$\frac{162}{19} = 8.5263\ldots$
4.	Ist die Zahl $\frac{1}{8}$ in $\mathbb{M}(2,32,-99,99)$ exakt darstellbar?	**ja**
5.	Gilt für alle $x \in \mathbb{D}$, dass $\|\text{fl}(x) - x\| \leq \text{eps}\,\|x\|$?	**ja**

Aufgabe 1
Gegeben sei die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
und eine rechte Seite
$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$
Wir betrachten für $0 < \varepsilon < 1$ eine Störung von A,
$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

1. Berechnen Sie die Lösung x_ε des gestörten Gleichungssystems $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$ und die Lösung x des exakten Gleichungssystems $A_0 x = b$ sowie die Konditionszahl $\kappa_\infty(A_\varepsilon)$.
2. Wie lautet der Satz, der bei exakter rechten Seite eine Abschätzung des relativen Fehlers der Lösung, $\frac{\|x_\varepsilon - x\|}{\|x\|}$, liefert?
3. Geben Sie alle Werte von $\varepsilon > 0$ an, für die man diesen Satz anwenden kann?
4. Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung des Gleichungssystems $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$ in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm unter den Annahme, dass die rechte Seite b exakt gegeben ist, ab.

3+1+2+4=10 Punkte

Musterlösung

1. $$x_\epsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$A_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\varepsilon+1} \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa_\infty(A_\varepsilon) = \|A_\varepsilon\|_\infty \|A_\varepsilon^{-1}\|_\infty = 2\cdot\max\left\{1+\frac{1}{\varepsilon+1}, \frac{1}{\varepsilon+1}\right\} = 2\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}$$
2. Nach Satz 3.9 gilt
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right).$$
falls $\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$, wobei $\Delta A = A_\varepsilon - A$.
3. **Version 1**
Prüfe, dass $\kappa(A_\varepsilon)\frac{\|\Delta A\|}{\|A_\varepsilon\|} < 1$
$$\kappa(A_\varepsilon)\frac{\|\Delta A\|}{\|A_\varepsilon\|} = 2\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}\frac{\varepsilon}{2} < 1 \Leftrightarrow \varepsilon^2+\varepsilon-1 < 0 \Leftrightarrow \varepsilon \in (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = (-1.61803398875, 0.6180339887499)$$
Der Satz ist anwendbar, wenn $\varepsilon \in \big(0, (-1+\sqrt{5})/2\big)$.
Version 2
Prüfe, dass $\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$
$$\kappa(A_\varepsilon)\frac{\|\Delta A\|}{\|A_\varepsilon\|} = 4\frac{\varepsilon}{2} < 1 \Leftrightarrow \varepsilon < 0.5$$
Der Satz ist anwendbar, wenn $\varepsilon \in \big(0, 0.5\big)$.
4. **Version 1**
Setzt man die Kondition ein und da b exakt angenommen wird
$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{2\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}}{1-2\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$
Der relative Fehler von A ist $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \frac{\|A_\varepsilon - A\|}{\|A\|} = \frac{\varepsilon}{2}$
$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{2\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}}{1-2\frac{\varepsilon+2}{\varepsilon+1}\frac{\varepsilon}{2}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Da angenommen wurde, dass $0 < \varepsilon < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, folgt, dass die Aussage gilt.

Weiteres umformen ergibt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq -\varepsilon \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon^2 + \varepsilon - 1} = -\varepsilon \frac{\varepsilon + 2}{\left(\varepsilon - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\varepsilon - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Solange die Störung ε fern der Nullstelle $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ im Nenner der letzten Abschätzung bleibt, ist der relative Fehler in x beschränkt und gut kontrolliert.

Version 2

Setzt man die Kondition ein und da b exakt angenommen wird

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{4}{1 - 4\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

Der relative Fehler von A ist $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \frac{\|A_\varepsilon - A\|}{\|A\|} = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{4}{1 - 4\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Da angenommen wurde, dass $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, folgt, dass die Aussage gilt.

Weiteres umformen ergibt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq -\varepsilon \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon^2 + \varepsilon - 1} = \frac{4\varepsilon}{2 - 4\varepsilon}$$

Solange die Störung ε fern der Nullstelle 0.5 im Nenner der letzten Abschätzung bleibt, ist der relative Fehler in x beschränkt und gut kontrolliert.

Aufgabe 2

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 9 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

1. Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung und *ohne* Äquilibrierung. Geben Sie L, R und die Permutationsmatrix P explizit an.
2. Lösen Sie das System mit Hilfe der LR-Zerlegung.
3. Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung.
4. Wir betrachten A jetzt als eine Störung von einer Matrix $A_U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Das ungestörte Problem lautet: Finde x_U sodass $A_U x_U = b$ gilt. Sei x die Lösung des gestörten Problems $Ax = b$ und $r := b - A_U x$ das Residuum. Wir betrachten x als eine Approximation von x_U und wollen diese Approximation durch einen Nachiterationsschritt verbessern. Wie lautet das Gleichungssystem, das man dazu lösen muss, und wie wird die verbesserte Approximation berechnet?

4+3+1+3=11 Punkte

Musterlösung

1. Vertauschung von Zeilen 1 und 3 ergibt:

$$A \to \overline{A} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 3 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die L-R-Zerlegung von $\overline{A}$ ist nach einem Schritt fertig:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Permutationsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Vorwärtseinsetzen:

$$b \to \overline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{(Pivotisierung)}$$

$$Ly = \overline{b}$$

ergibt

$$y = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen:

$$Rx = y$$

ergibt

$$x = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Wir haben dann

$$\det(P) = -1, \qquad \det(L) = 1, \qquad \det(R) = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60 \tag{2}$$

$$\det(A) = \frac{\det(L)\det(R)}{\det(P)} = \frac{1 \cdot 60}{-1} = -60 \tag{3}$$

4. Wir berechnen zuerst

$$r := b - A_U x = A_U x_U - A_U x = A_U (x_U - x). \tag{4}$$

Wir werden A_U jetzt mit $A = P^{-1}LR$ approximieren und müssen das folgende Problem für $\Delta x \in \mathbb{R}^3$ lösen:

$$P^{-1}LR\Delta x = r \quad \text{oder} \quad LR\Delta x = Pr \tag{5}$$

Die verbesserte Approximation heißt dann $x_1 = x + \Delta x \approx x$.

Aufgabe 3
Gesucht sei der Fixpunkt der Funktion

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^3+y^3}{12} + \frac{1}{2} \\ \frac{x^3-y^3}{12} + \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode für ein Programm, dass die Fixpunktiteration zu einem vorgegeben Startwert n Mal ausführt.
2. Zeigen Sie, dass die Funktion genau ein Fixpunkt in dem Gebiet $D = [0, 1] \times [0, 1]$ hat.
3. Berechnen Sie zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens ausgehend von dem Startvektor $(1/2, 1/2)^T$.
4. Wieviel Schritte des Fixpunktverfahrens genügen, um eine Lösung mit der Genauigkeit von 10^{-8} zu erhalten?

Hinweis: Verwenden Sie die ∞-Norm. Sollten Sie in Teil 2) kein L herausgefunden haben, so verwenden Sie $L = 1/2$ in Teil 4.)

1+7+2+2=12 Punkte

Musterlösung

1.
   - Input: (x_0, y_0)
   - For $i = 1, .., n-1$
   - $\quad (x_{i+1}, y_{i+1}) \longleftarrow F(x_i, y_i)$
   - End
   - Return (x_n, y_n)
2.
   - D ist abgeschlossen und somit vollständig.
   - Selbstabbildung.
     Für $(x, y) \in D$ ist $\frac{x^3+y^3}{12} \in [0, 2/12]$. Also
     $$F_1(x, y) \in [0 + 1/2, 2/12 + 1/2] = [1/2, 2/3] \subset [0, 1].$$
     Analog gilt $\frac{x^3-y^3}{12} \in [-1/12, 1/12]$ und
     $$F_2(x, y) \in [-1/12 + 1/3, 1/12 + 1/3] = [1/4, 5/12] \subset [0, 1].$$
   - Kontraktion.
     Da D konvex ist, rechne
     $$F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}x^2 & \frac{1}{4}y^2 \\ \frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{4}y^2 \end{pmatrix}$$
     Deshalb folgt
     $$|F'(x, y)|. \leq . \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|F'(x, y)\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$
     (Wobei $|...|.$ komponentenweise Beträge und $\leq .$ komponentenweise $\leq$ bedeutet.)
     Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit $L := 1/2$ erfüllt.
3. $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$
   $$x_1 = F_1(x_0, y_0) = \frac{1/8 + 1/8}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1}{48} + \frac{1}{2} = \frac{25}{48} \approx 0.520833333$$
   $$y_1 = F_2(x_0, y_0) = \frac{1/8 - 1/8}{12} + \frac{1}{3} \approx 0.333333333$$
   $$x_2 = F_1(x_1, y_1) \approx 0.514860177$$
   $$y_2 = F_2(x_1, y_1) \approx 0.342020671$$

4. Benutze die a-priori Abschätzung aus dem Banach'schen Fixpunktsatz

$$
\begin{aligned}
\frac{L^k}{1-L}\|(x_1,y_1)^T-(x_0,y_0)^T\|_\infty &\le 10^{-8}\\
\left(\frac{1}{2}\right)^k\|(25/48-1/2,1/3-1/2)^T\|_\infty &\le \frac{1}{2}\cdot 10^{-8}\\
\left(\frac{1}{2}\right)^k\|(1/48,-1/6)^T\|_\infty &\le \frac{1}{2}\cdot 10^{-8}\\
\left(\frac{1}{2}\right)^k\frac{1}{6} &\le \frac{1}{2}\cdot 10^{-8}\\
\left(\frac{1}{2}\right)^k &\le 3\cdot 10^{-8}\\
k\log\left(\frac{1}{2}\right) &\le \log(3\cdot 10^{-8})\\
\text{Da } \log(1/2) \text{ negativ } &\Rightarrow k \ge 24.99046226
\end{aligned}
$$

Nach 25 Schritten ist die gewünschte Genauigkeit erreicht.

Aufgabe 4

1. Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte f_i

t_i	1	2	3
f_i	1	-1	0

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta + t}.$$

genügen. Die Parameter α und β sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem.

2. Das nichtlineare Ausgleichsproblem soll jetzt über das Gauß-Newton-Verfahren gelöst werden. Seien (α_k, β_k) die Werte der k-ten Iterierten. Bestimmen Sie das lineare Ausgleichsproblem, das im k-te Schritt des Verfahrens gelöst werden muss.

3. Gegeben sei nun das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ 0 & 144 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung mit Givensrotationen.

2+3+8=13 Punkte

Musterlösung

1. Die i-te Zeile des Residuums lautet

$$r_i := f(t_i) - f_i = \frac{\alpha}{\beta + t_i} - f_i \stackrel{!}{=} 0.$$

Also ist das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem gegeben durch:

$$\left\| \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} f(t_1) - f_1 \\ f(t_2) - f_2 \\ f(t_3) - f_3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta+1} - 1 \\ \frac{\alpha}{\beta+2} + 1 \\ \frac{\alpha}{\beta+3} \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$$

2. Die i-te Zeile der Jakobischen J ist gegeben durch (das ist ein Gradient) :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\beta + t_i} & \frac{-\alpha}{(\beta + t_i)^2} \end{pmatrix}.$$

Die Jakobische im k-ten Schritt lautet dann

$$J(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_k + 1} & \frac{-\alpha_k}{(\beta_k + 1)^2} \\ \frac{1}{\beta_k + 2} & \frac{-\alpha_k}{(\beta_k + 2)^2} \\ \frac{1}{\beta_k + 3} & \frac{-\alpha_k}{(\beta_k + 3)^2} \end{pmatrix}$$

Das lineare Ausgleichsproblem lautet dann:

$$\left\| J(\alpha_k, \beta_k) \begin{pmatrix} \Delta\alpha_k \\ \Delta\beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\alpha_k}{\beta_k+1} - 1 \\ \frac{\alpha_k}{\beta_k+2} + 1 \\ \frac{\alpha_k}{\beta_k+3} \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(\Delta\alpha_k, \Delta\beta_k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}.$$

3. Um den Eintrag $A_{3,1}$ auf Null zu bringen, betrachtet man die Einträge $A_{1,1}$ und $A_{3,1}$. Es ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}(A_{1,1})\sqrt{5^2 + 12^2} = 13, c = \frac{A_{1,1}}{r} = \frac{5}{13}, s = \frac{A_{3,1}}{r} = \frac{12}{13}$$

$$G_{1,3} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 12 \\ 0 & 13 & 0 \\ -12 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{1,3}A = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 0 & 144 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}, G_{1,3}b = \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Um den Eintrag $(G_{1,3}A)_{3,2}$ auf Null zu bringen, betrachtet man die Einträge $(G_{1,3}A)_{2,2}$ und $(G_{1,3}A)_{3,2}$. Es ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}((G_{1,3}A)_{2,2})\sqrt{144^2 + 17^2} = 145, c = \frac{(G_{1,3}A)_{2,2}}{r} = \frac{144}{145}, s = \frac{(G_{1,3}A)_{3,2}}{r} = \frac{17}{145}$$

$$G_{2,3} = \frac{1}{145}\begin{pmatrix} 145 & 0 & 0 \\ 0 & 144 & 17 \\ 0 & -17 & 144 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{2,3}G_{1,3}A = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 0 & 145 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_{2,3}G_{1,3}b = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Als Lösung des Systems ergibt sich damit:

$$x_2 = \frac{-1}{145} = \frac{-1}{145} = -0.006897 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{19 - (\frac{-1}{145} \cdot 7)}{13} = \frac{2762}{1885} = 1.4653$$

Aufgabe 5

Der Teilraum $U \subset \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$U = \operatorname{span}\{\phi_1, \phi_2\} \qquad \text{mit} \qquad \phi_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ_1, ϕ_2 bezüglich des Standardskalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}\,, (v, w) \mapsto \sum_{j=1}^{4} v_j w_j\,,$$

eine Orthonormalbasis von U bilden.

b) Sei $v = (2, 2, 1, 1)^T$. Bestimmen Sie $u^* \in U$ mit

$$\|u^* - v\|_2 = \min_{u \in U} \|u - v\|_2\,.$$

4+5 = 9 Punkte

Musterlösung

a) Da $U = \operatorname{span}\{\phi_1, \phi_2\}$ genügt es zu zeigen, dass

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad i, j \in \{1, 2\}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \phi_1, \phi_1 \rangle &= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + 0 = 1\,,\\
\langle \phi_1, \phi_2 \rangle &= -\frac{4}{9} + 0 + \frac{4}{9} + 0 = 0\,,\\
\langle \phi_2, \phi_2 \rangle &= \frac{4}{9} + 0 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1\,.
\end{aligned}$$

b) Die Lösung des angegebenen Minimierungsproblems ist die Orthogonalprojektion $u^* = P_U(v)$ von v auf U. Da $\{\phi_1, \phi_2\}$ eine Orthonormalbasis von U bilden ist diese gegeben durch

$$P_U(v) = \sum_{j=1}^{2} \langle v, \phi_j \rangle \phi_j = \frac{1}{3}(4 + 2 + 2 + 0)\phi_1 + \frac{1}{3}(-4 + 0 + 2 + 1)\phi_2 = \frac{8}{3}\phi_1 - \frac{1}{3}\phi_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}18\\8\\14\\-1\end{pmatrix}.$$