Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik (für Elektrotechniker)

Prof. Dr. Wolfgang Dahmen

Samstag, 19. August 2017

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

- Hilfsmittel:
  - dokumentenechtes Schreibgerät (nicht mit Bleistift oder Rotstift schreiben)
  - die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung – bitte mit Name und Matrikelnummer versehen
  - **ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*. **ACHTUNG:** Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten
- Deckblatt ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben (Verständnisfragen und 5 Rechenaufgaben)
- Rechnen Sie, falls nicht anders angegeben, mit mindestens 4 signifikanten Ziffern
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. Sie können Ihre Klausuren am 31. August 2017 in Raum 149 (Hauptgebäude) einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.
Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen, auf dem Befundtatsachen sowie Datum und genaue Uhrzeit der Untersuchung aufgeführt werden. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen und wird von dort an den zuständigen Prüfungsausschuss weitergeleitet. Der Prüfungsausschuss entscheidet über die Anerkennung des Attestes. Bei Feststellung der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung gilt zusätzlich: Aus dem Attest muss sich ergeben, warum die/der Studierende nicht in der Lage war, die Beeinträchtigung früher zu erkennen. Der Prüfungsausschuss entscheidet ggf. unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den unten eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv–Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, PDA, MP3-Player usw. bei mir habe.

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : ____________________

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

VFr:	A1:	A**2**:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1: Es seien $A, B, P, L, R, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit P Permutationsmatrix, R obere Dreiecksmatrix, L normierte untere Dreiecksmatrix und D Diagonalmatrix.		
1.	Es seien A, B symmetrisch positiv definit. Ist dann $A + B$ immer symmetrisch positiv definit?	
2.	Sei A regulär. Existiert dann stets eine LDL^T-Zerlegung, so dass $A = LDL^T$?	
3.	Sei $A = LDL^T$. Ist dann stets $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$?	
4.	Ist P stets orthogonal?	
5.	Existiert für A symmetrisch positiv definit stets eine LR-Zerlegung $A = LR$?	

Verständnisfragenblock 2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\mathrm{R}ang(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $A = Q\,R$ gilt. Weiter sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.		
1.	Steht der Vektor $b - A\,x^\star$ stets senkrecht auf b ?	
2.	Sei $\kappa_2(A) = 6$. Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems über Normalengleichungen muss ein Gleichungssystem der Form $Mx = f$ gelöst werden. Was ist $\kappa_2(M)$?	
3.	Ist die Matrix $A\,A^T$ immer symmetrisch positiv definit?	
4.	Ergibt sich die Matrix R durch Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung, angewandt auf A?	
5.	Ist $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$?	

Verständnisfragenblock 3: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\mathrm{MAX}}, -x_{\mathrm{MIN}}] \cup [x_{\mathrm{MIN}}, x_{\mathrm{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	Was ist x_{MIN} in $\mathbb{M}(3, 2, -1, 2)$?	
2.	Was ist x_{MAX} in $\mathbb{M}(3, 2, -1, 2)$?	
3.	Was ist die relative Konditionszahl $\kappa_{rel}(x)$ für die Auswertung der Funktion $f(x) = x^2 + x$ an der Stelle $x = 2$?	
4.	Ist die Zahl $-\frac{1}{4}$ in $\mathbb{M}(2, 32, -99, 99)$ exakt darstellbar?	
5.	Gilt für alle $x \in \mathbb{D}$, dass $\|\mathrm{fl}(x) - x\| \leq \mathrm{eps}\,\|x\|$?	

Verständnisfragenblock 4: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.		
1.	Der Aufwand für die Berechnung über dividierte Differenzen (d.h. die Newton-Darstellung) ist $\mathcal{O}(n)$ Operationen.	
2.	Was ist $P(Q \mid x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5)(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 2$ für $Q = x^3 - 2$?	
3.	Gilt $P(g \mid x_0, \ldots, x_n) = g$ für alle Polynome g ?	
4.	Wird der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} \left\| P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x) \right\|$ für wachsendes n immer kleiner?	
5.	Ist $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$?	

Verständnisfragenblock 5: Wir betrachten Nullstellenprobleme.		
1.	Ist die Newton-Methode immer global quadratisch konvergent?	
2.	Wie viele LR-Zerlegungen müssen für die Durchführungen von 4 Schritten des vereinfachten Newton-Verfahrens (für Systeme) berechnet werden, wenn alle auftretenden Gleichungssysteme mittels LR-Zerlegung gelöst werden?	
3.	Beim Sekantenverfahren wird die Steigung der Funktion durch einen Differenzenquotienten approximiert.	
4.	Für eine quadratische Funktion liefert das Newton-Verfahren für beliebige Startwerte die Lösung nach einer Iteration	
5.	Gibt es zu jedem Nullstellenproblem nur ein Fixpunktverfahren, mit welchem dieses gelöst werden kann?	

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und eine rechte Seite

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir betrachten für $0 < \varepsilon < 1$ eine Störung von A,

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

1. Berechnen Sie die Lösung x_ε des gestörten Gleichungsystems $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$ und die Lösung x des exakten Gleichungsystems $A_0 x = b$ sowie die Konditionszahl $\kappa_1(A_\varepsilon)$.
2. Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung des gestörten Gleichungssystems $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$ in der $\|\cdot\|_1$-Norm unter der Annahme, dass die rechte Seite b exakt gegeben ist, ab. Geben Sie eine Bedingung an ε an, die erfüllt sein muss, damit diese Fehlerabschätzung gilt.
3. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass die Konditionszahl der Matrix AD in der 1-Norm minimal wird.

3+5+2=10 Punkte

Aufgabe 2

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung und *ohne* Äquilibrierung. Geben Sie L, R und die Permutationsmatrix P explizit an.

   b) Lösen Sie das System mit Hilfe der LR-Zerlegung.

   c) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung.

2. Sei $\tilde{A}$ eine Störung einer gegebenen, nichtsingulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Das ungestörte Problem lautet: Finde x sodass $Ax = b$ gilt. Dieses Problem sei hier aber *nicht exakt auflösbar* (zum Beispiel aufgrund von Rundungsfehlern). Anstelle dessen lasse sich aber das gestörte Problem $\tilde{A}\tilde{x} = b$ leicht und exakt nach $\tilde{x}$ auflösen, wobei dementsprechend $r := b - A\tilde{x}$ das Residuum bzgl. der Approximation $\tilde{x}$ zu x ist. Wir wollen diese Approximation nun durch einen Nachiterationsschritt verbessern. Wie lautet das Gleichungssystem, das man dazu lösen muss, und wie wird die verbesserte Approximation berechnet? In welcher Form ist $\tilde{A}$ typischerweise (es reicht ein Beispiel) gegeben?

4+3+1+3=11 Punkte

Aufgabe 3

1. Formulieren Sie für das Newton-Verfahren für Systeme einen Algorithmus in Pseudocode. Sie können dabei folgende Funktionen als gegeben annehmen:

Funktion	Ausgabe
`f`(x)	Die Funktion f ausgewertet an der Stelle x
`f'`(x)	Die Jacobi-Matrix f' der Funktion f berechnet und ausgewertet an der Stelle x
`LR`(A)	Die Zerlegung (P, L, R), wobei P eine Permutationsmatrix ist und $PA = LR$ gilt
`VS`(M, b)	Der Vektor $x = M^{-1}b$ berechnet durch Vorwärtseinsetzen mit der Matrix M und dem Vektor b
`RS`(M, b)	Der Vektor $x = M^{-1}b$ berechnet durch Rückwärtseinsetzen mit der Matrix M und dem Vektor b
$+, -, \cdot$	Das entsprechende Ergebnis der arithmetischen Operation für Vektoren und Matrizen

2. Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^2 - 2x - y = 0$$
$$7y^2 - x^2 + 2x = 36$$

indem Sie je zwei Iterationen des Newton-Verfahrens und des vereinfachten Newton-Verfahrens durchführen. Benutzen Sie den Startwert $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4+7=11 Punkte

Aufgabe 4

1. Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte f_i

t_i	2	3	5
f_i	4	2	1

   Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \alpha\beta^t.$$

   genügen. Die Parameter α und β sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem.

2. Das nichtlineare Ausgleichsproblem soll jetzt über das Gauß-Newton-Verfahren gelöst werden. Seien (α_k, β_k) die Werte der k-ten Iterierten. Bestimmen Sie das lineare Ausgleichsproblem, das im k-te Schritt des Verfahrens gelöst werden muss.

3. Gegeben sei nun das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x\in\mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 8 & 10 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 34 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung mit Givensrotationen.

2+3+8=13 Punkte

Aufgabe 5

Es sei $m \geq n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Weiter sei $A = U\Sigma V^T$ eine SVD von A.

1. Welche Bedingung an die Singulärwerte garantiert, dass A vollen Rang hat?
2. Zeigen Sie, dass für alle $b \in \mathbb{R}^m$
$$A^T A\ A^+ b = A^T b$$
gilt.
3. Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* = A^+ b$ (eine) Lösung des linearen Ausgleichsproblems
$$\|Ax - b\| \to \min$$
ist.

Erinnerung:

Es sind also $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal sowie $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (d.h. $\Sigma_{i,i} = \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$ und $\Sigma_{i,j} = 0$ wann immer $i \neq j$). Dabei sind $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n$ die Singulärwerte, $r \leq n$. Die *Pseudoinverse* $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist definiert als $A^+ := V\Sigma^+ U^T$, $\Sigma^+ := \operatorname{diag}(\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1}, 0, \ldots, 0)$.

1+7+2 = 10 Punkte