Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1: Es seien $A, B, P, L, R, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit P Permutationsmatrix, R obere Dreiecksmatrix, L normierte untere Dreiecksmatrix und D Diagonalmatrix.

1.	Es seien A, B symmetrisch positiv definit. Ist dann $A + B$ immer symmetrisch positiv definit?	**ja**
2.	Sei A regulär. Existiert dann stets eine LDL^T-Zerlegung, so dass $A = LDL^T$?	**nein**
3.	Sei $A = LDL^T$. Ist dann stets $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$?	**nein**
4.	Ist P stets orthogonal?	**ja**
5.	Existiert für A symmetrisch positiv definit stets eine LR-Zerlegung $A = LR$?	**ja**

Verständnisfragenblock 2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $Rang(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $A = Q\,R$ gilt. Weiter sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.

1.	Steht der Vektor $b - A\,x^\star$ stets senkrecht auf b ?	nein
2.	Sei $\kappa_2(A) = 6$. Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems über Normalengleichungen muss ein Gleichungssystem der Form $Mx = f$ gelöst werden. Was ist $\kappa_2(M)$?	**36**
3.	Ist die Matrix $A\,A^T$ immer symmetrisch positiv definit?	**nein**
4.	Ergibt sich die Matrix R durch Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung, angewandt auf A?	**nein**
5.	Ist $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$?	**ja**

Verständnisfragenblock 3: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Was ist x_{MIN} in $\mathbb{M}(3, 2, -1, 2)$?	$\frac{1}{9}$
2.	Was ist x_{MAX} in $\mathbb{M}(3, 2, -1, 2)$?	8
3.	Was ist die relative Konditionszahl $\kappa_{rel}(x)$ für die Auswertung der Funktion $f(x) = x^2 + x$ an der Stelle $x = 2$?	$\frac{5}{3} = 1.666\ldots$
4.	Ist die Zahl $-\frac{1}{4}$ in $\mathbb{M}(2, 32, -99, 99)$ exakt darstellbar?	**ja**
5.	Gilt für alle $x \in \mathbb{D}$, dass $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \leq \text{eps}\,\lvert x\rvert$?	**ja**

Verständnisfragenblock 4: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$.		
1.	Der Aufwand für die Berechnung über dividierte Differenzen (d.h. die Newton-Darstellung) ist $\mathcal{O}(n)$ Operationen.	**nein**
2.	Was ist $P(Q \mid x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 5)(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 2$ für $Q = x^3 - 2$?	**6**
3.	Gilt $P(g \mid x_0, \dots, x_n) = g$ für alle Polynome g ?	**nein**
4.	Wird der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} \left\lvert P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) \right\rvert$ für wachsendes n immer kleiner?	**nein**
5.	Ist $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$?	**ja**

Verständnisfragenblock 5: Wir betrachten Nullstellenprobleme.		
1.	Ist die Newton-Methode immer global quadratisch konvergent?	**nein**
2.	Wie viele LR-Zerlegungen müssen für die Durchführungen von 4 Schritten des vereinfachten Newton-Verfahrens (für Systeme) berechnet werden, wenn alle auftretenden Gleichungssysteme mittels LR-Zerlegung gelöst werden?	**1**
3.	Beim Sekantenverfahren wird die Steigung der Funktion durch einen Differenzenquotienten approximiert.	**ja**
4.	Für eine quadratische Funktion liefert das Newton-Verfahren für beliebige Startwerte die Lösung nach einer Iteration	**nein**
5.	Gibt es zu jedem Nullstellenproblem nur ein Fixpunktverfahren, mit welchem dieses gelöst werden kann?	**nein**

Aufgabe 1

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und eine rechte Seite

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir betrachten für $0 < \varepsilon < 1$ eine Störung von A,

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1+\varepsilon \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

1. Berechnen Sie die Lösung x_ε des gestörten Gleichungsystems $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$ und die Lösung x des exakten Gleichungsystems $A_0 x = b$ sowie die Konditionszahl $\kappa_1(A_\varepsilon)$.
2. Schätzen Sie den relativen Fehler der Lösung des gestörten Gleichungssystems $A_\varepsilon x_\varepsilon = b$ in der $\|\cdot\|_1$-Norm unter der Annahme, dass die rechte Seite b exakt gegeben ist, ab. Geben Sie eine Bedingung an ε an, die erfüllt sein muss, damit diese Fehlerabschätzung gilt.
3. Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass die Konditionszahl der Matrix AD in der 1-Norm minimal wird.

3+5+2=10 Punkte

Musterlösung

1. $$x_\varepsilon = \frac{1}{1+\varepsilon}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$A_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{-1}{e+1} \\ 0 & \frac{1}{e+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa_1(A_\varepsilon) = \|A_\varepsilon\|_1 \|A_\varepsilon^{-1}\|_1 = (3+\varepsilon)\cdot \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{\varepsilon+1}\right\} = 2\frac{\varepsilon+3}{\varepsilon+1}$$

2. Wenn b exakt gegeben ist, gilt nach dem Satz 3.9

   $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa_1(A)}{1-\kappa_1(A)\frac{\|\Delta A\|_1}{\|A\|_1}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

   falls $\kappa_1(A)\frac{\|\Delta A\|_1}{\|A\|_1} < 1$.

   Es ist $\kappa_1(A) = 6$ und der relative Fehler von A ist $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \frac{\|A_\varepsilon - A\|}{\|A\|} = \frac{\varepsilon}{3}$. Obige Voraussetzung ist also hier gegeben durch

   $$6\frac{\varepsilon}{3} < 1.$$

   Damit die Abschätzung anwendbar ist, muss also $\varepsilon < \frac{1}{2}$ gelten.

   Setzt man die Kondition ein, wobei b exakt angenommen wurde, gilt

   $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{6}{1-6\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

   $$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{6}{1-6\frac{\varepsilon}{3}}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

   Weiteres Umformen ergibt

   $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{6\varepsilon}{3-6\varepsilon}$$

3. Die gesuchte Diagonalmatrix D ist die Spaltenäquilibrierung

   $$D = \begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^2 |a_{i,1}|\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(\sum_{i=1}^2 |a_{i,2}|\right)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung und *ohne* Äquilibrierung. Geben Sie L, R und die Permutationsmatrix P explizit an.

   b) Lösen Sie das System mit Hilfe der LR-Zerlegung.

   c) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung.

2. Sei $\tilde{A}$ eine Störung einer gegebenen, nichtsingulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Das ungestörte Problem lautet: Finde x sodass $Ax = b$ gilt. Dieses Problem sei hier aber *nicht exakt auflösbar* (zum Beispiel aufgrund von Rundungsfehlern). Anstelle dessen lasse sich aber das gestörte Problem $\tilde{A}\tilde{x} = b$ leicht und exakt nach $\tilde{x}$ auflösen, wobei dementsprechend $r := b - A\tilde{x}$ das Residuum bzgl. der Approximation $\tilde{x}$ zu x ist. Wir wollen diese Approximation nun durch einen Nachiterationsschritt verbessern. Wie lautet das Gleichungssystem, das man dazu lösen muss, und wie wird die verbesserte Approximation berechnet? In welcher Form ist $\tilde{A}$ typischerweise (es reicht ein Beispiel) gegeben?

4+3+1+3=11 Punkte

Musterlösung

1. a) LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 & 1.5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{P_{1,2}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 1.5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 1 \\ \hline 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{P_{2,3}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

   Während der LR-Zerlegung wird zunächst $P_{1,2}$ (Vertauschung 1. $\leftrightarrow$ 2. Zeile) und dann $P_{2,3}$ (Vertauschung 2. $\leftrightarrow$ 3. Zeile) auf A angewendet, d.h. insgesamt $PA = LR$ mit

$$P = P_{2,3}P_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ & 2 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

   b) $Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Pb$, löse also zunächst $Ly = Pb$ (Vorwärtseinsetzen) und anschließend $Rx = y$ (Rückwärtseinsetzen):

$$Ly = Pb: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 5 \\ 0 & 1 & & 6 \\ 0.5 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 - 2.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7.5 \end{pmatrix}$$

$$Rx = y: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ & 2 & 0 & 6 \\ & & 1 & 7.5 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 5 - 3\cdot 3 - 7.5 \\ 3 \\ 7.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.5 \\ 3 \\ 7.5 \end{pmatrix}.$$

   c) Es gilt $\det(P) = \det(P_{2,3})\det(P_{1,2}) = (-1)(-1) = 1$, und folglich

$$\det(A) = \det(PA) = \det(L)\det(R) = \det(R) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2.$$

2. Man berechnet zuerst

$$r := b - A\tilde{x} = Ax - A\tilde{x} = A(x - \tilde{x}) = A\delta.$$

   Das zu lösende Gleichungssystem ist dann

$$\tilde{A}\delta = r.$$

   Die Korrektur ergibt dann die bessere Nährung $x^1 = \tilde{x} + \delta$. $\tilde{A}$ ist dabei typischerweise als eine leicht invertierbare Faktorisierung gegeben, z.B. $\tilde{A} = P^{-1}LR$. Gelöst wird dann über Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen:

$$P^{-1}LR\delta = r \quad \text{oder} \quad LR\delta = Pr$$

Aufgabe 3

1. Formulieren Sie für das Newton-Verfahren für Systeme einen Algorithmus in Pseudocode. Sie können dabei folgende Funktionen als gegeben annehmen:

Funktion	Ausgabe
$\mathtt{f}(x)$	Die Funktion f ausgewertet an der Stelle x
$\mathtt{f}'(x)$	Die Jacobi-Matrix f' der Funktion f berechnet und ausgewertet an der Stelle x
$\mathtt{LR}(A)$	Die Zerlegung (P, L, R), wobei P eine Permutationsmatrix ist und $PA = LR$ gilt
$\mathtt{VS}(M, b)$	Der Vektor $x = M^{-1}b$ berechnet durch Vorwärtseinsetzen mit der Matrix M und dem Vektor b
$\mathtt{RS}(M, b)$	Der Vektor $x = M^{-1}b$ berechnet durch Rückwärtseinsetzen mit der Matrix M und dem Vektor b
$+, -, \cdot$	Das entsprechende Ergebnis der arithmetischen Operation für Vektoren und Matrizen

2. Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem

$$x^2 - 2x - y = 0$$
$$7y^2 - x^2 + 2x = 36$$

indem Sie je zwei Iterationen des Newton-Verfahrens und des vereinfachten Newton-Verfahrens durchführen. Benutzen Sie den Startwert $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4+7=11 Punkte

Musterlösung

1.
- Input: x^0
- For $k = 0, 1, 2, \ldots$:
- $\quad (P, L, R) \leftarrow \mathtt{LR}(\mathtt{f}'(x^k))$
- $\quad b \leftarrow P \cdot (-\mathtt{f}(x^k))$
- $\quad z \leftarrow \mathtt{VS}(L, b) \qquad //Lz = -P \cdot (f(x^k)) =: b$
- $\quad s^{k+1} \leftarrow \mathtt{RS}(R, z) \qquad //Rx = z$
- $\quad x^{k+1} \leftarrow x^k + s^k$

2.

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^2 - 2x - y \\ 7y^2 - x^2 + 2x - 36 \end{pmatrix} \quad f'(x) = \begin{pmatrix} 2x - 2 & -1 \\ -2x + 2 & 14y \end{pmatrix} \tag{1}$$

Das volle Verfahren:

I $x^0 = (2, 2)$

$f(x^0) = (-2.0, -8.0)$

$f'(x^0) = \begin{pmatrix} 2.0 & -1.0 \\ -2.0 & 28.0 \end{pmatrix}$

$s^0 = (1.185185185, 0.3703703704)$

$x^1 = (3.185185185, 2.370370370)$

II $f(x^1) = (1.404663923, -0.4444444444)$

$f'(x^1) = \begin{pmatrix} 4.370370370 & -1.0 \\ -4.370370370 & 33.18518519 \end{pmatrix}$

$s^1 = (-0.3282326230, -0.02983420705)$

$x^2 = (2.856952562, 2.340536163)$

Das vereinfachte Verfahren:

I s. oben:

$f(x^0) = (-2.0, -8.0)$

$f'(x^0) = \begin{pmatrix} 2.0 & -1.0 \\ -2.0 & 28.0 \end{pmatrix}$

$s^0 = (1.185185185, 0.3703703704)$

$x^1 = (3.185185185, 2.370370370)$

II $f(x^1) = (1.404663923, -0.4444444444)$

$s^1 = (-0.7201138038, -0.03556368440)$

$x^2 = (2.465071381, 2.334806686)$

Aufgabe 4

1. Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte f_i

t_i	2	3	5
f_i	4	2	1

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \alpha\beta^t.$$

genügen. Die Parameter α und β sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem.

2. Das nichtlineare Ausgleichsproblem soll jetzt über das Gauß-Newton-Verfahren gelöst werden. Seien (α_k, β_k) die Werte der k-ten Iterierten. Bestimmen Sie das lineare Ausgleichsproblem, das im k-te Schritt des Verfahrens gelöst werden muss.

3. Gegeben sei nun das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x\in\mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 8 & 10 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 34 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung mit Givensrotationen.

2+3+8=13 Punkte

Musterlösung

1. Die i-te Zeile des Residuums lautet

$$F_i := f(t_i) - f_i = \alpha\beta^{t_i} - f_i.$$

Also ist das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem gegeben durch:

$$\left\|\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} f(t_1) - f_1 \\ f(t_2) - f_2 \\ f(t_3) - f_3 \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} \alpha\beta^2 - 4 \\ \alpha\beta^3 - 2 \\ \alpha\beta^5 - 1 \end{pmatrix}\right\|_2 \to \min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$$

2. Die i-te Zeile der Jakobischen J ist gegeben durch (das ist ein Gradient) :

$$\begin{pmatrix} \beta_i^t & \alpha t_i \beta^{t_i - 1} \end{pmatrix}.$$

Die Jakobische im k-ten Schritt lautet dann

$$F'(\alpha_k, \beta_k) = \begin{pmatrix} \beta_k^2 & 2\alpha_k\beta_k \\ \beta_k^3 & 3\alpha_k\beta_k^2 \\ \beta_k^5 & 5\alpha_k\beta_k^4 \end{pmatrix}$$

Das lineare Ausgleichsproblem lautet dann:

$$\left\| F'(\alpha_k, \beta_k)\begin{pmatrix} \Delta\alpha_k \\ \Delta\beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_k\beta_k^2 - 4 \\ \alpha_k\beta_k^3 - 2 \\ \alpha_k\beta_k^5 - 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(\Delta\alpha_k, \Delta\beta_k)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}.$$

3. Um den Eintrag $A_{2,1}$ auf Null zu bringen, betrachtet man die Einträge $A_{1,1}$ und $A_{2,1}$. Es ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}(A_{1,1})\sqrt{6^2 + 8^2} = 10, c = \frac{A_{1,1}}{r} = \frac{3}{5}, s = \frac{A_{2,1}}{r} = \frac{4}{5}$$

$$G_{1,2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{1,2}A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 10 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}, G_{1,2}b = \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Um den Eintrag $(G_{1,2}A)_{3,2}$ auf Null zu bringen, betrachtet man die Einträge $(G_{1,2}A)_{2,2}$ und $(G_{1,2}A)_{3,2}$. Es ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}((G_{1,2}A)_{2,2})\sqrt{10^2 + 24^2} = 26, c = \frac{(G_{1,2}A)_{2,2}}{r} = \frac{5}{13}, s = \frac{(G_{1,2}A)_{3,2}}{r} = \frac{12}{13}$$

$$G_{2,3} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & -12 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{2,3}G_{1,2}A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 26 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_{2,3}G_{1,2}b = \begin{pmatrix} 13 \\ 26 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Als Lösung des Systems ergibt sich damit:

$$x_2 = \frac{1}{26} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{13 - (1 \cdot 5)}{10} = \frac{8}{10} = 0.8$$

Aufgabe 5

Es sei $m \geq n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Weiter sei $A = U\Sigma V^T$ eine SVD von A.

1. Welche Bedingung an die Singulärwerte garantiert, dass A vollen Rang hat?
2. Zeigen Sie, dass für alle $b \in \mathbb{R}^m$
$$A^T A \; A^+ b = A^T b$$
gilt.
3. Zeigen Sie, dass der Vektor $x^* = A^+ b$ (eine) Lösung des linearen Ausgleichsproblems
$$\|Ax - b\| \to \min$$
ist.

Erinnerung:

Es sind also $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal sowie $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (d.h. $\Sigma_{i,i} = \sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$ und $\Sigma_{i,j} = 0$ wann immer $i \neq j$). Dabei sind $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n$ die Singulärwerte, $r \leq n$. Die *Pseudoinverse* $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist definiert als $A^+ := V\Sigma^+ U^T$, $\Sigma^+ := \operatorname{diag}(\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1}, 0, \ldots, 0)$.

1+7+2 = 10 Punkte

Musterlösung

1. Ist $\sigma_n > 0$ (bzw. $r = n$), so hat A vollen Rang.
2. Zunächst stellen wir fest, dass $A^T A A^+ = A^T$ zu zeigen ist. Einsetzen liefert
$$\begin{aligned} A^T A A^+ &= V\Sigma^T U^T \; U\Sigma V^T \; V\Sigma^+ U^T \\ A^T A A^+ &= V\Sigma^T \underbrace{(U^T U)}_{I} \Sigma \underbrace{(V^T V)}_{I} \Sigma^+ U^T \\ &= V\Sigma^2 \Sigma^+ U^T, \quad \Sigma^2 = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ &= V\Sigma^T U^T = A^T \end{aligned}$$
3. $y \in \mathbb{R}^n$ ist Lösung des linearen Ausgleichsproblems genau dann wenn y die Normalengleichung erfüllt, d.h. $A^T A y = A^T y$. Da nach Aufgabe $a)$ gerade $A^T A x^* = A^T b$ gilt, ist x^* demnach Lösung des linearen Ausgleichsproblems.