

Matr.–Nr.:

Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik für E-Techniker
Prof. Dr. Arnold Reusken
Dienstag 6. August 2019

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.
- **Höchstens ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der “Positiv-Liste” steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : _____

Sie haben insgesamt 90 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Dienstag, den 27. August 2019**, im Raum 149 einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko-Blätter.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der “Positiv-Liste” befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: _____

Vorname: _____

Unterschrift: _____

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	BP:	Σ :
------	-----	-----	-----	-----	-----	------------

Verständnisfragen-Teil

(36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

VF-1: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.		
1.	Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine Permutationsmatrix P , eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R so, dass $PA = LR$.	
2.	Die Konditionszahl $\kappa(A)$ von einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezüglich einer Norm $\ \cdot\ $ gegeben durch $\kappa(A) = \ A^{-1}\ \ A\ ^{-1}$.	
3.	Es sei P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine oberere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $ \det(A) = \det(R) $.	
4.	$\ A\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ji} $.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.2 & 1.6 \\ 14 & 2.9 & 3.1 \\ 1.5 & 2.1 & 1.4 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\det(D)$.	
Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.		
6.	Es existiert eine Zerlegung $A = QR$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$.	
7.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie $A = Q_1 R_1$ eine mittels Givens-Transformation und $A = Q_2 R_2$ eine mittels Householder-Transformation berechnete QR -Zerlegung von A . Dann gilt $Q_1 = Q_2$.	
8.	Wenn $A = QR$ eine QR -Zerlegung von A ist, dann folgt dass $\det A = \det R$.	
9.	Die QR -Zerlegung von A kann mittels Householder Transformationen auch ohne Pivotisierung stabil bestimmt werden.	
10.	Es sei Q eine orthogonale Matrix. Geben Sie $\ 2019 Q^{4321}\ _2$ an.	

VF-2: Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung.		
1.	Die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 13 in $\mathbb{M}(3, 8, -8, 8)$ ist 111.	
2.	Es gilt $\text{fl}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$.	
3.	Die Funktion fl ist stetig auf $\mathbb{R}$.	
4.	Es gilt $ \text{fl}(x) - x \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
5.	Geben Sie $x_{\max}$ für $\mathbb{M}(3, 3, -2, 2)$ an.	
6.	Für die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl $x_{\min}$ gilt $\text{fl}(1 + x_{\min}) = 1$.	
7.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems immer instabil.	
8.	Die Funktion $f(x) = x^2 \ln(x)$ ist gut konditioniert für $x \rightarrow \infty$.	
9.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	
10.	Berechne die Kondition $\kappa_{\text{rel}}(x, y)$ für $f(x, y) = (x^3 - 1) \sin y$ an der Stelle $x = y = \pi/2$.	

VF-3: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Interpolationspolynom, das die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ interpoliert.		
1.	Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n , so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.	
2.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.	
3.	Falls $f \in C^{n+1}([a, b])$, dann hängt der Interpolationsfehler im Intervall $[a, b]$ von dem Knotenpolynom $\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ und dem Maximum von $ f^{(n+1)} $ in $[a, b]$ ab.	
4.	Die Wahl der Stützstellen hat keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler.	
5.	Es seien $f(x) = \ln(x+1) - 3x^2 + 1$, $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Bestimmen Sie $P(f x_0, x_1, x_2)(0)$.	
Es seien $f \in C[a, b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$ eine Quadraturformel.		
6.	Die Stützstellen der Gauß-Quadraturformeln sind nicht unbedingt äquidistant.	
7.	Die Gewichte der Gauß-Quadraturformeln sind immer größer als Null.	
8.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grad ≤ 2 ist.	
9.	Falls die Quadraturformel $Q(f)$ exakt ist vom Grad $n + 1$, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	
10.	Gib den Exaktheitsgrad der Simpsonregel an.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $\ Ax - b\ _2 \rightarrow \min$. Weiterhin seien $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ zweimal stetig differenzierbar und $\Phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimmen Sie $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(x^*)\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$.		
1.	Für reguläre Matrizen A gilt im Allgemeinen: $\kappa_2(A^T A) \approx 2\kappa_2(A)$.	
2.	$\ A\ _2 = \ Q A\ _2$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$	
3.	$\ Ax - b\ _2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \text{Bild}(A)$.	
4.	Es existiert stets ein eindeutiges $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $A^T A x^* = A^T b$.	
5.	Es seien $m = 2$, $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} (x - \frac{1}{2})^2 \\ 6x - 3 \end{pmatrix}$. Geben Sie x^* an.	
6.	Wenn $\ F(x^*)\ _2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.	
7.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von Φ bestimmen.	
8.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von Φ bestimmen.	
9.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	
10.	Es sei nun $F(x, y) = \begin{pmatrix} (x - 2)^2 \\ 2y \\ 3y - 1 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\ F(x, y)\ _2 \rightarrow \min$. Bestimmen Sie (x_1, y_1) ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren und geben Sie x_1 an.	

Aufgabe 1

(7+3+1=11 Punkte)

- a) Für beliebiges, aber festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die folgende symmetrische Matrix gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von A für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die A positiv definit ist.

Geben Sie die untere Dreiecksmatrix L , die Diagonalmatrix D und den zulässigen Bereich für α explizit an.

- b) Nun seien

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\delta \in \mathbb{R}$ gegeben. Außerdem sei

$$B = LDL^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. die Cholesky-Zerlegung von B ist gegeben. Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Bx = b$ in Abhängigkeit von δ unter Verwendung der angegebenen Cholesky-Zerlegung. Hierfür dürfen die Matrizen LD und $DL^\top$ nicht berechnet werden.

- c) Berechnen Sie die Determinante von $B = LDL^\top$ mit L und D wie in b).

Aufgabe 2

(3+1+6 = 10 Punkte)

Gegeben sind die Messwerte

$$\begin{array}{c|c|c|c} t_i & -1 & 0 & 3 \\ \hline f_i & -0.5 & 1 & -3 \end{array}.$$

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass die Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \alpha \cdot |t| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \beta \cdot \frac{1}{t^2 + 1}$$

genügen.

Zu bestimmen sind die optimalen Parameter α und β im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

- a) Stellen Sie dazu ein geeignetes lineares Ausgleichsproblem auf. Geben Sie dabei die Matrix und die Vektoren **explizit** an.
- b) Hat das unter a) formulierte Ausgleichsproblem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $\|Bx - c\|_2 \rightarrow \min$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -0.95 \\ 0.55 \\ 1.05 \\ -0.45 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen und geben Sie das Residuum explizit an.

Aufgabe 3

(4+11=15 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$y^2 - 2y - x = 4$$

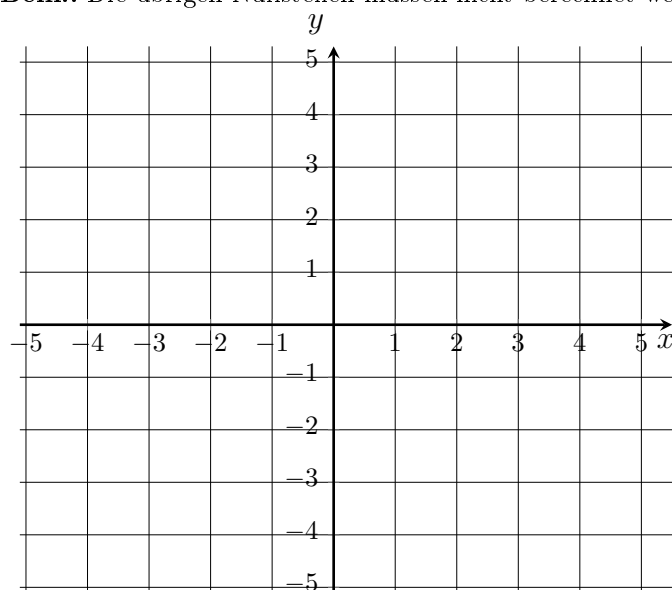
$$x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} = \frac{33}{4}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

- Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).
- Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 4. Quadranten für beide Verfahren

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Aufgabe 4

(2+4+2 = 8 Punkte)

Für die Funktion F ist eine Wertetabelle gegeben

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$F(x)$	3	-1	-3	2	2	0	1

- Gesucht ist eine möglichst gute Näherung für $F(0.5)$ mit der Hilfe eines Polynoms zweiten Grades. Welche Stützstellen wählen Sie, um dieses Polynom zu bestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Berechnen Sie zu den in a) bestimmten Stützstellen den entsprechenden Näherungswert mit dem Neville-Aitken-Schema. Sollten Sie keine Stützstellen bestimmt haben, verwenden Sie $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.
- Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil b) berechneten Näherungswert an.

Hinweis: Für alle $x \in [-3, 3]$ gilt für die Ableitung: $|F^{(n)}(x)| \leq n^2 + 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

