

Verständnisfragen-Teil

(36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

VF-1: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $\ Ax - b\ _2 \rightarrow \min$. Weiterhin seien $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ zweimal stetig differenzierbar und $\Phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(x^*)\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$.		
1.	Für reguläre Matrizen A gilt im Allgemeinen: $\kappa_2(A^T A) \approx 2\kappa_2(A)$.	falsch
2.	$\ A\ _2 = \ QA\ _2$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$	wahr
3.	$\ Ax - b\ _2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \text{Bild}(A)$.	wahr
4.	Es existiert stets ein eindeutiges $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $A^T A x^* = A^T b$.	falsch
5.	Es seien $m = 2$, $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} (x - \frac{1}{2})^2 \\ 6x - 3 \end{pmatrix}$. Gib x^* an.	0.5
6.	Wenn $\ F(x^*)\ _2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.	wahr
7.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von Φ bestimmen.	falsch
8.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von Φ bestimmen.	falsch
9.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	wahr
10.	Es sei nun $F(x, y) = \begin{pmatrix} (x - 2)^2 \\ 2y \\ 3y - 1 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\ F(x, y)\ _2 \rightarrow \min$. Bestimme (x_1, y_1) ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib x_1 an.	1

VF-2: Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung.		
1.	Die Funktion fl ist stetig auf $\mathbb{R}$.	falsch
2.	Es gilt $ \text{fl}(x) - x \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	falsch
3.	Es gilt $\text{fl}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$.	wahr
4.	Die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 13 in $\mathbb{M}(3, 8, -8, 8)$ ist 111.	wahr
5.	Geben Sie $x_{\max}$ für $\mathbb{M}(3, 3, -2, 2)$ an.	8.6667
6.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems immer instabil.	falsch
7.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	falsch
8.	Die Funktion $f(x) = x^2 \ln(x)$ ist gut konditioniert für $x \rightarrow \infty$.	wahr
9.	Für die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl $x_{\min}$ gilt $\text{fl}(1 + x_{\min}) = 1$.	falsch
10.	Berechne die Kondition $\kappa_{\text{rel}}(x, y)$ für $f(x, y) = (x^3 - 1) \sin y$ an der Stelle $x = y = \pi/2$.	4.0432

VF-3: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Interpolationspolynom, das die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ interpoliert.		
1.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.	falsch
2.	Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n , so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.	falsch
3.	Die Wahl der Stützstellen hat keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler.	falsch
4.	Falls $f \in C^{n+1}([a, b])$, dann hängt der Interpolationsfehler im Intervall $[a, b]$ von dem Knotenpolynom $\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ und dem Maximum von $ f^{(n+1)} $ in $[a, b]$ ab.	wahr
5.	Es seien $f(x) = \ln(x+1) - 3x^2 + 1$, $n = 2$, $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. Bestimme das Lagrange-Interpolationspolynom $P(f x_0, x_1, x_2)(0)$.	1
Es seien $f \in C[a, b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$ eine Quadraturformel.		
6.	Falls die Quadraturformel $Q(f)$ exakt ist vom Grad $n+1$, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	wahr
7.	Die Gewichte der Gauß-Quadraturformeln sind immer größer als Null.	wahr
8.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grad ≤ 2 ist.	falsch
9.	Die Stützstellen der Gauß-Quadraturformeln sind nicht unbedingt äquidistant.	wahr
10.	Gib den Exaktheitsgrad der Simpsonregel an.	3

VF-4: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.		
1.	Die Konditionszahl $\kappa(A)$ von einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezüglich einer Norm $\ \cdot\ $ gegeben durch $\kappa(A) = \ A^{-1}\ \ A\ ^{-1}$.	falsch
2.	$\ A\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ji} $.	falsch
3.	Es sei P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine oberere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $ \det(A) = \det(R) $.	wahr
4.	Für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine Permutationsmatrix P , eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R so, dass $PA = LR$.	wahr
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.2 & 1.6 \\ 14 & 2.9 & 3.1 \\ 1.5 & 2.1 & 1.4 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\det(D)$.	0.0025
Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.		
6.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sowie $A = Q_1 R_1$ eine mittels Givens-Transformation und $A = Q_2 R_2$ eine mittels Householder-Transformation berechnete QR -Zerlegung von A . Dann gilt $Q_1 = Q_2$.	falsch
7.	Es existiert eine Zerlegung $A = QR$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$.	wahr
8.	Die QR -Zerlegung von A kann mittels Householder Transformationen auch ohne Pivotisierung stabil bestimmt werden.	wahr
9.	Wenn $A = QR$ eine QR -Zerlegung von A ist, dann folgt dass $\det A = \det R$.	falsch
10.	Es sei Q eine orthogonale Matrix. Geben Sie $\ 2019 Q^{4321}\ _2$ an.	2019

Aufgabe 1

(7+3+1=11 Punkte)

- a) Für beliebiges, aber festes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die folgende symmetrische Matrix gegeben.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von A für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die A positiv definit ist.

Geben Sie die untere Dreiecksmatrix L , die Diagonalmatrix D und den zulässigen Bereich für α explizit an.

- b) Nun seien

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\delta \in \mathbb{R}$ gegeben. Außerdem sei

$$B = LDL^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

d.h. die Cholesky-Zerlegung von B ist gegeben. Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Bx = b$ in Abhängigkeit von δ unter Verwendung der angegebenen Cholesky-Zerlegung. Hierfür dürfen die Matrizen LD und DL^T nicht berechnet werden.

- c) Berechnen Sie die Determinante von $B = LDL^T$ mit L und D wie in b).

Musterlösung

- a) Die Matrix A ist symmetrisch und die Cholesky-Zerlegung kann als Test für Positiv-Definitheit verwendet werden. Dazu berechnen wir die Cholesky-Zerlegung und schränken α so ein, dass alle Diagonaleinträge von D positiv sind:

$$d_{1,1} = a_{1,1} = \alpha > 0$$

$$\ell_{2,1} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

$$\ell_{3,1} = \frac{a_{3,1}}{d_{1,1}} = \frac{0}{\alpha} = 0$$

$$d_{2,2} = a_{2,2} - \ell_{2,1}^2 \cdot d_{1,1} = 1 - 1 \cdot \alpha = 1 - \alpha > 0$$

$$\ell_{3,2} = \frac{a_{3,2}}{d_{2,2}} - \ell_{2,1}\ell_{3,1}\frac{d_{1,1}}{d_{2,2}} = \frac{1}{1-\alpha} - 0 = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$d_{3,3} = a_{3,3} - \ell_{3,1}^2 \cdot d_{1,1} - \ell_{3,2}^2 \cdot d_{2,2} = 2 - 0 - \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2} = 2 - \frac{1}{1-\alpha} > 0.$$

(4)

Die Bedingungen, dass $d_{i,i} > 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ ist äquivalent zu $\alpha \in (0, 0.5)$ und damit folgt dass A positiv definit ist für $\alpha \in (0, 0.5)$.

(1)

Die Zerlegung $A = LDL^T$ ist gegeben durch

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\alpha} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

(2)

- b) Um $Bx = LDL^\top x = b$ für beliebiges aber festes $\delta \in \mathbb{R}$ zu lösen, lösen wir zuerst $Lz = b$, dann $Dy = z$ und schließlich $L^\top x = y$.

Durch Vorwärtseinsetzen erhalten wir aus

$$Lz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

dass

$$\begin{aligned} z_1 &= \delta \\ z_2 &= \delta - \delta = 0 \\ z_3 &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt folgt aus

$$Dy = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = z$$

dass

$$y_1 = \delta, \quad y_2 = 0 \quad \text{und} \quad y_3 = 2.$$

Schließlich folgt aus

$$L^\top x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = y$$

durch Rückwärtseinsetzen, dass

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= 0 - 2 = -2 \\ x_1 &= \delta - (-2) = \delta + 2, \end{aligned}$$

sodass die Lösung gegeben ist durch

$$x = \begin{pmatrix} \delta + 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(3)

- c) Mit $\det(L) = 1 = \det(L^\top)$ folgt, dass

$$\det(B) = \det(L) \det(D) \det(L^\top) = \det(D) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

(1)

Aufgabe 2

(3+1+6 = 10 Punkte)

Gegeben sind die Messwerte

$$\begin{array}{c|c|c|c} t_i & -1 & 0 & 3 \\ \hline f_i & -0.5 & 1 & -3 \end{array}.$$

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass die Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \alpha \cdot |t| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \beta \cdot \frac{1}{t^2 + 1}$$

genügen.

Zu bestimmen sind die optimalen Parameter α und β im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

- Stellen Sie dazu ein geeignetes lineares Ausgleichsproblem auf. Geben Sie dabei die Matrix und die Vektoren **explizit** an.
- Hat das unter a) formulierte Ausgleichsproblem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $\|Bx - c\|_2 \rightarrow \min$, wobei

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -0.95 \\ 0.55 \\ 1.05 \\ -0.45 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen und geben Sie das Residuum explizit an.

Musterlösung:**Teil a)** Das lineare Ausgleichsproblem lautet: Finde $(\alpha^*, \beta^*) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\left\| A \cdot \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} - b \right\|_2 = \min_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} \left\| A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - b \right\|_2$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(3)

Teil b) A hat vollen Spaltenrang, d.h., das lineare Ausgleichsproblem ist eindeutig lösbar.

(1)

Teil c) Normalgleichung ergibt:

$$[B^T B | B^T c] = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 2 \end{array} \right)$$

(3)

$$\text{Für die Lösung erhält man } \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

(1)

Das Residuum:

$$res = \|Bx^* - c\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.05 \\ -0.05 \\ -0.05 \\ -0.05 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.1$$

(2)

Aufgabe 3

(4+11=15 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$y^2 - 2y - x = 4$$

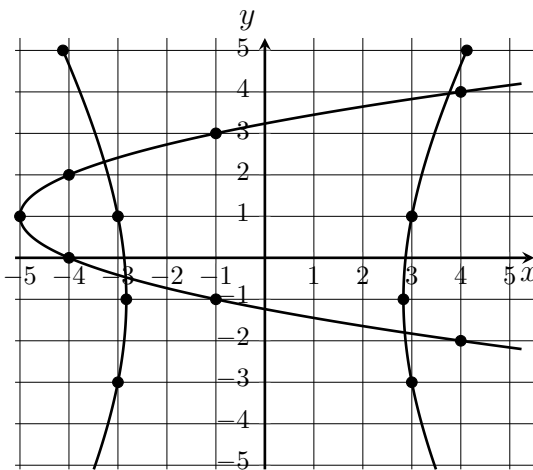
$$x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{y}{2} = \frac{33}{4}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

- a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).
- b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 4. Quadranten für beide Verfahren

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.**Teil a) Skizze:**Parabel $x = (y - 1)^2 - 5$ und Hyperbel $\frac{x^2}{8} - \frac{(y+1)^2}{32} = 1$ oder Wertetabelle zu $x = \pm \sqrt{\frac{33+y^2+2y}{4}}$. Zu skizzieren ist der gesamte Bereich:

Startwerte:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -0.5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

(4)

Teil b) Newton-Verfahren:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 - x - 2y - 4 \\ x^2 - \frac{1}{4} \cdot y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{33}{4} \end{pmatrix} \rightarrow f'(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 2y - 2 \\ 2x & -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Newton-Iteration:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & | & 3 \\ 4 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & | & -1 \\ 6 & 0.5 & | & -0.75 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & | & -1 \\ 0 & -35.5 & | & -6.75 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -0.1408450704 \\ 0.1901408451 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 2.85915493 \\ -1.809859155 \end{pmatrix}$$

(8)

Vereinfachtes Newton-Verfahren (erster Schritt und $f(\mathbf{x}_1)$ vom Newton-Verfahren):

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & | & -1 \\ 4 & 0 & | & -0.75 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.296875 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 2.8125 \\ -1.703125 \end{pmatrix}$$

(3)

Aufgabe 4

(2+4+2 = 8 Punkte)

Für die Funktion F ist eine Wertetabelle gegeben

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$F(x)$	3	-1	-3	2	2	0	1

- a) Gesucht ist eine möglichst gute Näherung für $F(0.5)$ mit der Hilfe eines Polynoms zweiten Grades. Welche Stützstellen wählen Sie, um dieses Polynom zu bestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- b) Berechnen Sie zu den in a) bestimmten Stützstellen den entsprechenden Näherungswert mit dem Neville-Aitken-Schema. Sollten Sie keine Stützstellen bestimmt haben, verwenden Sie $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.
- c) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil b) berechneten Näherungswert an.

Hinweis: Für alle $x \in [-3, 3]$ gilt für die Ableitung: $|F^{(n)}(x)| \leq n^2 + 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Musterlösung:

Teil a) Es gilt $|(0.5 - (-1)) \cdot (0.5 - 0) \cdot (0.5 - 1)| = \frac{3}{8} = |(0.5 - 0) \cdot (0.5 - 1) \cdot (0.5 - 2)|$

Der Knotenpolynom-Anteil in der Fehlerformel wird sowohl durch die Wahl $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ als auch durch $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ minimiert. (2)

Teil b) Tableau:

x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$		$P_{i,2}$
-1	-3			
		$\searrow$		
0	2	$\rightarrow$	$2 + \frac{2-(-3)}{0-(-1)}(0.5-0) = 4.5$	
		$\searrow$		$\searrow$
1	2	$\rightarrow$	$2 + \frac{2-2}{1-0}(0.5-1) = 2$	$\rightarrow 2 + \frac{2-4.5}{2-(-1)}(0.5-1) = 2.4167$
		$\searrow$		$\searrow$
2	0	$\rightarrow$	$0 + \frac{0-2}{2-1}(0.5-2) = 3$	$\rightarrow 3 + \frac{3-2}{2-0}(0.5-2) = 2.25$

(3)

Also $F(0.5) \approx p_2(0.5) = 2.4167$ bzw. (2.25)

(1)

Teil c) Mit der Fehlerformel folgt (in beiden Fällen):

$$|F(0.5) - p_2(0.5)| \leq \frac{1}{3!} \max_{x \in [x_0, x_2]} |F^{(3)}(x)| \cdot |(0.5 - x_0)(0.5 - x_1)(0.5 - x_2)| \leq (3^2 + 1) \cdot 1.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.625$$

(2)