Matr.–Nr.: ☐☐☐☐☐☐ Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik für E-Techniker

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Donnerstag, 06. August 2020

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- **Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.**
- **Höchstens ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der "Positiv–Liste" steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
  ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : _____

Sie haben insgesamt 90 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. **Achtung: Fehlende Begründungen führen zu Punktabzügen!** Sie können Ihre Klausur am **Dienstag, 01. September 2020** in der Aula einsehen und sich (nur!) dort gegebenenfalls zur mündlichen Prüfung anmelden. Eine Einteilung zur Einsicht erfolgt zusammen mit der Bekanntgabe der Ergebnisse.

Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Bitte geben Sie numerische Endergebnisse in Dezimaldarstellung auf mindestens 5 signifikante Stellen genau an (Brüche sind als Endergebnis also z.B. nicht erlaubt).

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko–Blätter.

Die/der Studierende erklärt hiermit auch, dass sie/er sich aktuell gesund fühlt. Im Falle eines Prüfungsabbruchs wegen Krankheit gilt Folgendes: Die/der Studierende sucht unverzüglich, d. h. direkt im Anschluss an den Prüfungsabbruch eine Ärztin bzw. einen Arzt auf und lässt sich ein Attest ausstellen. Dieses muss das Datum und die Uhrzeit dokumentieren und die Bestätigung der Ärztin/des Arztes ausweisen, dass die gesundheitliche Beeinträchtigung nicht vor (bzw. im Falle der Prüfungsunfähigkeit nach Abgabe der Prüfungsunterlagen nicht vor oder während) der Prüfung festgestellt werden konnte. Dieses Attest ist unverzüglich beim ZPA einzureichen. Ggf. entscheidet der Prüfungsausschuss (insbesondere im Fall der vermeintlichen Prüfungsunfähigkeit nach Beendigung der Prüfung) unter Einbeziehung einer/eines Vertrauensärztin/-arztes über die Anerkennung des Attestes.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der "Positiv-Liste" befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: _____

Vorname: _____

Unterschrift: _____

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:

Verständnisfragen-Teil (36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := fl(fl(x) - fl(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Für jedes $x \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \epsilon$.	
2.	Es existiert ein $x \in \mathbb{D}$, so dass $\frac{\lvert\text{fl}(x)-x\rvert}{\lvert x\rvert} = \text{eps}$.	
3.	Die Zahl 31 ist in $\mathbb{M}(2,6,-8,8)$ exakt darstellbar.	
4.	Es gilt $\frac{\lvert(x\ominus y)-(x-y)\rvert}{\lvert x-y\rvert} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$ mit $x \neq y$.	
5.	Berechnen Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3,2,-1,3)$.	
6.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems immer instabil.	
7.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte unvermeidbare Fehler.	
8.	Es seien $x = 10^{-9}$ und $y = 2 + 10^{-9}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.	
9.	Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist für alle $x \in [-1,1]$ gut konditioniert.	
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = 2x^2y^5$ im Punkt $(2,1)$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $Bx^* = b$.	
2.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \kappa(A)\frac{\|x^*-\tilde{x}\|}{\|x^*\|}$, mit $\kappa(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$.	
3.	Es existiert immer eine QR-Zerlegung $A = QR$ von A.	
4.	Es sei $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A. Dann gilt $Rx^* = Qb$.	
5.	Es seien $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$.	
Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$		
6.	Die Singulärwerte sind immer reell und positiv.	
7.	Es gilt $\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.	
8.	Falls $m = n$ so gilt $\lvert\det(A)\rvert = \Pi_{i=1}^n \sigma_i$.	
9.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sowie $A = Q_1R_1$ eine mittels Givens-Transformation und $A = Q_2R_2$ eine mittels Householder-Transformation berechnete $Q\,R$-Zerlegung von A. Dann gilt $Q_1 = Q_2$.	
10.	Es sei Q eine orthogonale Matrix. Geben Sie $\|2020\,Q^{41}\|_2$ an.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Außerdem sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$ und $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ die Pseudoinverse. Ferner seien $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.

1.	Es gilt $\det(\tilde{R}) \neq 0$.	
2.	Es gilt $\tilde{R}x^* = Qb$.	
3.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$.	
4.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabilität des Lösungsverfahrens über die QR-Zerlegung.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Θ.	
6.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	
7.	Es gilt $x^* = V\Sigma U^T b$.	
8.	Für $m = n$ gilt $AA^+ = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.	
9.	Die Singulärwerte sind gleich dem Absolutbetrag der Eigenwerte von A.	
10.	Es sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-2)^2 \\ 2\,y \\ 3\,y - 1 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestimmem Sie (x_1, y_1) ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0,0)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren und geben Sie x_1 an.	

VF-4: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ interpoliert. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\dots,x_n]\,f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(Q\,\|\,x_0,\dots,x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	
2.	Es gilt $P(f\,\|\,x_0,\dots,x_n)(x) = P(f\,\|\,x_{n-1},\dots,x_0)(x) + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})[x_0,\dots,x_n]\,f$.	
3.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$, $0 \le j \le n$. Es gilt $P(f\|x_0,\dots,x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} \ell_{jn}(x)[x_0,\dots,x_j]f$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
4.	Es gilt $\delta_n = [x_1,\dots,x_n]\,f$.	
5.	Es seien $f(x) = 9x^2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$. Berechnen Sie δ_2.	
Es seien $f \in C[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i\, f(x_i)$ eine Quadraturformel.		
6.	Die Gewichte der Gauß-Quadraturformeln sind immer nichtnegativ.	
7.	Es seien $x_0,\dots,x_m$ die Stützstellen der Gauß-Quadratur, und I_m die zugehörige Quadratur. Dann gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f\,\|\,x_0,\dots,x_m)(x)\,dx$.	
8.	Falls die Quadraturformel $Q(f)$ exakt ist vom Grad $n+1$, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	
9.	Es seien $I_2(f)$ die Simpsonregel und $I_2^n(f)$ die zugehörige summierte Regel auf n Teilintervallen. Es gilt $\|I_2^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	
10.	Seien $a = 0$, $b = 2$ und $I_1(f)$ die Trapezregel. Berechnen Sie $I_1(x^3+1)$.	

Aufgabe 1 (4+2+3+2=11 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4\alpha & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| > 1.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit Pivotisierung. Geben Sie L, R und P explizit an.

Wir betrachten nun die LR-Zerlegung von $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, also $\tilde{P}\,B = \tilde{L}\,\tilde{R}$ mit

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/15 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $\tilde{L}y = \tilde{P}b$.

c) Für welche β hat das Gleichungssystem $Bx = b$

(i) genau eine Lösung?

(ii) mehr als eine Lösung?

(iii) keine Lösung?

d) Wir betrachten den Fall (ii). Wählen Sie β entsprechend und berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Bx = b$ unter Verwendung der zu B angegebenen LR-Zerlegung.

Aufgabe 2 (2+4+4 = 10 Punkte)

Gegeben sind die Punkte

t_i	1	3	6
y_i	3	-4	7

,

die gemäß theoretischer Überlegungen auf dem Graph der Funktion

$$y(t) = 2^{\alpha t} + \frac{1}{2} t^{\beta+1} + 5$$

liegen. Zu bestimmen sind die optimalen Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 13 \\ -26 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen. Wie groß ist das Residuum?
Hinweis: Householder-Transformationen oder der Ansatz über Normalengleichungen werden mit 0 Punkten bewertet.

c) Wie groß darf der absolute Fehler von c, in der $\|\cdot\|_2$-Norm, höchstens sein, damit der relative Fehler in x, ebenfalls in der $\|\cdot\|_2$-Norm, nicht größer als ein Prozent ist?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für $\alpha > 0$ betrachten wir die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f auf $[0,1]$ für alle $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ genau einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 4 (2+2+3=7 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	1	3

a) Berechnen Sie die drei fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
x_0 = -1 & [x_0]f & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 0 & 2 & \longrightarrow & 1 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 1 & 1 & \longrightarrow & [x_1, x_2]f & \longrightarrow & -1 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 2 & 3 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3/2 & \longrightarrow & [x_0, x_1, x_2, x_3]f
\end{array}
$$

b) Stellen Sie für das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 zur gegebenen Wertetabelle die Newton-Darstellung auf und berechnen Sie anschließend $p_3(0)$ durch Horner-artige Auswertung der Newton-Darstellung.

c) Für die n-ten Ableitungen von f gelte $\max_{x\in[-1,2]} |f^{(n)}(x)| \leq 6 \cdot 2^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie unter dieser Annahme eine möglichst scharfe Abschätzung für $|f(0.5) - p_3(0.5)|$.

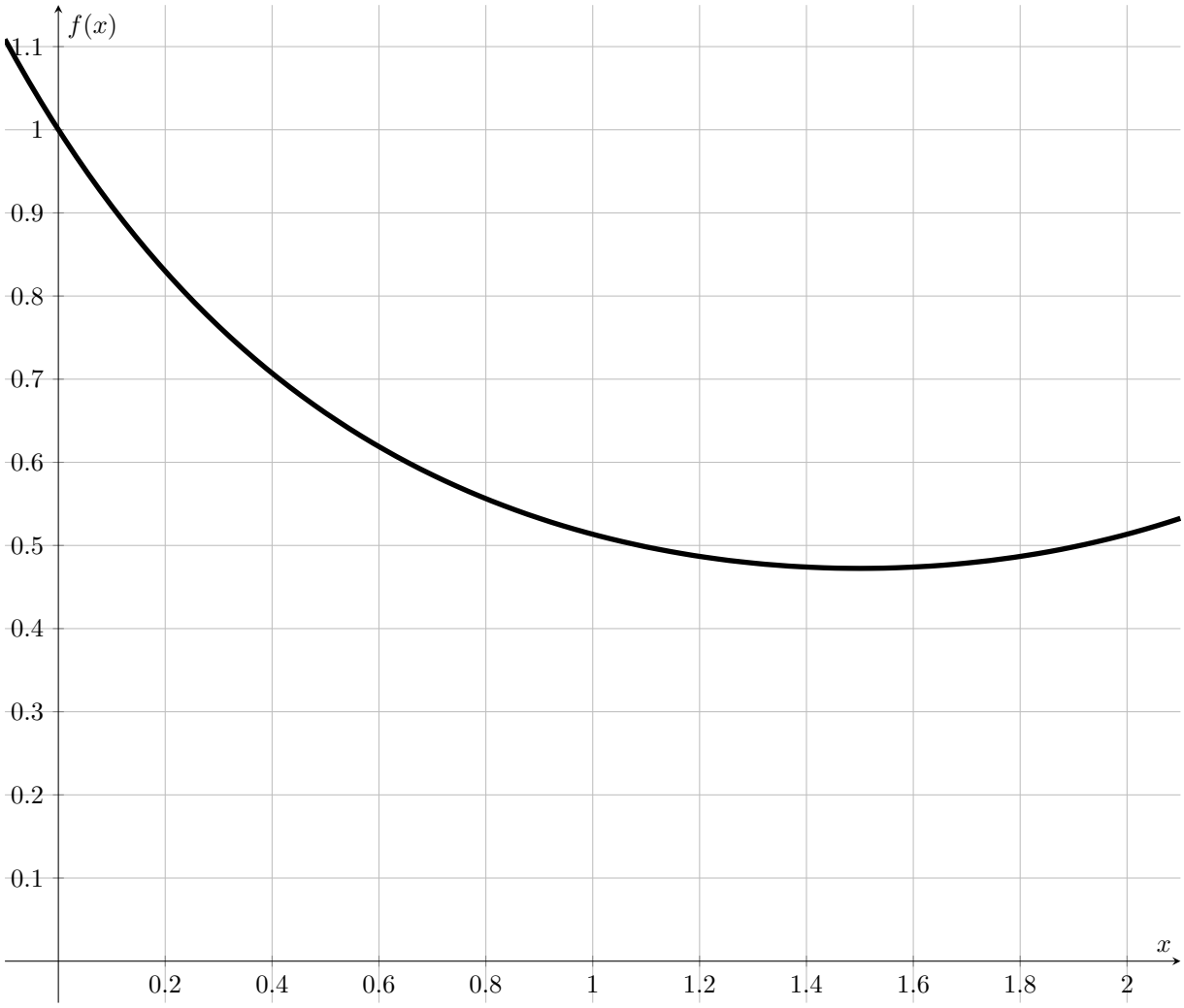
Aufgabe 5 (3+5+2 = 10 Punkte)

Es sei $f(x) := e^{\frac{x^2}{3}-x}$. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^2 e^{\frac{x^2}{3}-x}\,\mathrm{d}x$$

und seine numerische Approximation.

a) Wir möchten das Integral mit Hilfe der summierten Trapezregel mit der Schrittlänge $h = 1$ approximieren. Zeichnen Sie die Fläche, die mit dieser Quadraturregel ausgerechnet wird, in die Abbildung (s.u.) ein. Schreiben Sie die numerischen Werte der Stellen, an denen f ausgewertet werden muss, in die Skizze.

b) Bestimmen Sie für die summierte Trapezregel eine geeignete Schrittweite h so, dass der Quadraturfehler unter der Schranke $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-1}$ bleibt.
Hinweis: Ohne Beweis darf verwendet werden: Für alle Ableitungen von f gilt $|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(0)|$ für $x \in [0, 2]$.

c) Berechnen Sie die numerische Approximation des Integrals mit Hilfe der summierten Trapezregel für $h = \frac{2}{3}$.