Verständnisfragen-Teil (36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := fl(fl(x) - fl(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Für jedes $x \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \le$ eps und $\text{fl}(x) = x + \epsilon$.	wahr
2.	Es existiert ein $x \in \mathbb{D}$, so dass $\frac{\lvert\text{fl}(x)-x\rvert}{\lvert x\rvert} =$ eps.	falsch
3.	Die Zahl 31 ist in $\mathbb{M}(2,6,-8,8)$ exakt darstellbar.	wahr
4.	Es gilt $\frac{\lvert(x\ominus y)-(x-y)\rvert}{\lvert x-y\rvert} \le$ eps für alle $x, y \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$ mit $x \neq y$.	wahr
5.	Berechnen Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3,2,-1,3)$.	**24**
6.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems immer instabil.	falsch
7.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte unvermeidbare Fehler.	wahr
8.	Es seien $x = 10^{-9}$ und $y = 2 + 10^{-9}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.	falsch
9.	Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist für alle $x \in [-1,1]$ gut konditioniert.	wahr
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = 2x^2y^5$ im Punkt $(2,1)$.	**5**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $Bx^* = b$.	falsch
2.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\\|r\\|}{\\|b\\|} \leq \kappa(A)\frac{\\|x^*-\tilde{x}\\|}{\\|x^*\\|}$, mit $\kappa(A) := \\|A\\|\\|A^{-1}\\|$.	wahr
3.	Es existiert immer eine QR-Zerlegung $A = QR$ von A.	wahr
4.	Es sei $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A. Dann gilt $Rx^* = Qb$.	falsch
5.	Es seien $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$.	**36**

Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$

6.	Die Singulärwerte sind immer reell und positiv.	falsch
7.	Es gilt $\kappa_2(A) = \\|A\\|_2\\|A^{-1}\\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.	falsch
8.	Falls $m = n$ so gilt $\|\det(A)\| = \Pi_{i=1}^n \sigma_i$.	wahr
9.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sowie $A = Q_1R_1$ eine mittels Givens-Transformation und $A = Q_2R_2$ eine mittels Householder-Transformation berechnete $Q\,R$-Zerlegung von A. Dann gilt $Q_1 = Q_2$.	falsch
10.	Es sei Q eine orthogonale Matrix. Geben Sie $\\|2020\,Q^{41}\\|_2$ an.	**2020**

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix}\tilde{R}\\ 0\end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Außerdem sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung mit Singulärwerten $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n$ und $A^+ = V\Sigma^+U^T$ die Pseudoinverse. Ferner seien $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_2$ und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.

1.	Es gilt $\det(\tilde{R}) \neq 0$.	wahr
2.	Es gilt $\tilde{R}x^* = Qb$.	falsch
3.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$.	wahr
4.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabilität des Lösungsverfahrens über die QR-Zerlegung.	falsch
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix}3\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Θ.	**0**
6.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	wahr
7.	Es gilt $x^* = V\Sigma U^T b$.	falsch
8.	Für $m = n$ gilt $AA^+ = \text{diag}(1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.	wahr
9.	Die Singulärwerte sind gleich dem Absolutbetrag der Eigenwerte von A.	falsch
10.	Es sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix}(x-2)^2\\ 2\,y\\ 3\,y-1\end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestimmem Sie (x_1,y_1) ausgehend vom Startwert $(x_0,y_0) = (0,0)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren und geben Sie x_1 an.	**1**

VF-4: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ interpoliert. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\ldots,x_n]\,f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(Q\,\|\,x_0,\ldots,x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	wahr
2.	Es gilt $P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_n)(x) = P(f\,\|\,x_{n-1},\ldots,x_0)(x) + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})[x_0,\ldots,x_n]\,f$.	wahr
3.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}$, $0 \le j \le n$. Es gilt $P(f\|x_0,\ldots,x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n}\ell_{jn}(x)[x_0,\ldots,x_j]f$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	falsch
4.	Es gilt $\delta_n = [x_1,\ldots,x_n]\,f$.	falsch
5.	Es seien $f(x) = 9x^2$, $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$. Berechnen Sie δ_2.	**9**
Es seien $f \in C[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^{m}\omega_i\,f(x_i)$ eine Quadraturformel.		
6.	Die Gewichte der Gauß-Quadraturformeln sind immer nichtnegativ.	wahr
7.	Es seien $x_0,\ldots,x_m$ die Stützstellen der Gauß-Quadratur, und I_m die zugehörige Quadratur. Dann gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_m)(x)\,dx$.	wahr
8.	Falls die Quadraturformel $Q(f)$ exakt ist vom Grad $n+1$, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	wahr
9.	Es seien $I_2(f)$ die Simpsonregel und $I_2^n(f)$ die zugehörige summierte Regel auf n Teilintervallen. Es gilt $\|I_2^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	wahr
10.	Seien $a = 0$, $b = 2$ und $I_1(f)$ die Trapezregel. Berechnen Sie $I_1(x^3+1)$.	**10**

Aufgabe 1 (4+2+3+2=11 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4\alpha & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R}, |\alpha| > 1.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit Pivotisierung. Geben Sie L, R und P explizit an.

Wir betrachten nun die LR-Zerlegung von $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$, also $\tilde{P}\,B = \tilde{L}\,\tilde{R}$ mit

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/15 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta \in \mathbb{R}.$$

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $\tilde{L}y = \tilde{P}b$.

c) Für welche β hat das Gleichungssystem $Bx = b$

(i) genau eine Lösung?

(ii) mehr als eine Lösung?

(iii) keine Lösung?

d) Wir betrachten den Fall (ii). Wählen Sie β entsprechend und berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Bx = b$ unter Verwendung der zu B angegebenen LR-Zerlegung.

a) LR-Zerlegung mit Pivotisierung:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4\alpha & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Pivot }(1,3)}{\xrightarrow{\text{da } 6>3}} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4\alpha & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 6 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 4\alpha & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{Gauss}}{\xrightarrow{\text{da } |4\alpha|>1}} \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 4\alpha & 1 \\ \hline 1/2 & -1/(4\alpha) & 1/(4\alpha) \end{array}\right)$$

Also gilt $P\,A = L\,R$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1/(4\alpha) & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1/(4\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{und } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bem.: In der Praxis wird nicht die Matrix P sondern der Pivotvektor gespeichert.

(4)

b) Wir haben

$$\tilde{L}\,y = \tilde{P}\,b \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1/5 & -1/15 & 1 & \beta \end{array}\right) \downarrow \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

(2)

c) Wir haben

$$\tilde{R}\,x = y \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \beta \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad 0 \cdot x_3 = \beta\,.$$

Da die Matrix $\tilde{R}$ singulär ist, erhält man daraus:

(i) Es gibt nie genau eine Lösung, da $\tilde{R}$ singulär ist.

(ii) Falls $\beta = 0$ gilt, ist x_3 beliebig, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen.

(iii) Im Fall $\beta \neq 0$ gibt es keine Lösung, da $b \notin \text{Bild}(B)$.

(3)

d) Wir haben

$$\tilde{R}\,x = y \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 15 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \uparrow \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-2\gamma}{6} \\ \frac{1}{5} \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16667 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -0.33333 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \gamma \in \mathbb{R}.$$

(2)

Aufgabe 2 (2+4+4 = 10 Punkte)

Gegeben sind die Punkte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & 1 & 3 & 6 \\ \hline y_i & 3 & -4 & 7 \end{array},$$

die gemäß theoretischer Überlegungen auf dem Graph der Funktion

$$y(t) = 2^{\alpha t} + \frac{1}{2}t^{\beta+1} + 5$$

liegen. Zu bestimmen sind die optimalen Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}}\|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 13 \\ -26 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen. Wie groß ist das Residuum? **Hinweis:** Householder-Transformationen oder der Ansatz über Normalengleichungen werden mit 0 Punkten bewertet.

c) Wie groß darf der absolute Fehler von c, in der $\|\cdot\|_2$-Norm, höchstens sein, damit der relative Fehler in x, ebenfalls in der $\|\cdot\|_2$-Norm, nicht größer als ein Prozent ist?

Teil a)

Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(x) = F(\alpha, \beta)$ lautet

$$F_i(x) := y(t_i) - y_i = 2^{\alpha t_i} + \frac{1}{2}t_i^{\beta+1} + 5 - y_i.$$

Gesucht ist somit x^* mit $||F(x^*)||_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} ||F(x)||_2$ mit $x = (\alpha, \beta)$ und

$$F(x) = F(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 2^\alpha + 2.5 \\ 2^{3\alpha} + 1.5 \cdot 3^\beta + 9 \\ 2^{6\alpha} + 3 \cdot 6^\beta - 2 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Teil b)

Das System wird mit Givens–Rotationen auf Dreiecksgestalt gebracht.
Der Eintrag $(2, 1)$ wird eliminiert:

$$r = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26, \ c = \frac{10}{26}, \ s = -\frac{24}{26};$$

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} 10 & 13 \\ -24 & -26 \\ 0 & -4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 26 & 29 \\ 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{array}\right)$$

(2)

Daraus erhalten wir

$$26x^* = 29 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \frac{29}{26} = 1.1154.$$

(1)

Für das Residuum erhalten wir

$$res = \|Bx^* - c\|_2 = \sqrt{20} = 4.4721.$$

(1)

Teil c)

Die Formeln stehen auf der Formelsammlung. (Das Weglassen von $\cos(\Theta)$ ist sowohl eine falsche Formel als auch eine Vereinfachung.)
Hier ist $(0 \neq x \in \mathbb{R})$ $\|B\,x\|/\|x\| = |x|\,\|(10,\,-24,\,0)^T\|/|x| = \|(10,\,-24,\,0)^T\|$, also $\kappa_2(B) = 1$. Weiter ist $\|Bx^*\|_2 = 29$ und wir erhalten

$$\frac{\kappa_2(B)}{\cos(\Theta)}\frac{\|\tilde{c} - c\|_2}{\|c\|_2} = \frac{\kappa_2(B)}{\|Bx^*\|_2}\|\tilde{c} - c\|_2 = \frac{1}{29}\|\tilde{c} - c\|_2 \overset{!}{\leq} 0.01.$$

Also muss gelten

$$\|\tilde{c} - c\|_2 \leq 0.29.$$

(4)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Für $\alpha > 0$ betrachten wir die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass f auf $[0,1]$ für alle $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ genau einen Fixpunkt besitzt.

Die Menge $[0,1]$ ist beschränkt und abgeschlossen, also vollständig.

Selbstabbildung: Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = -2\alpha x e^{-\alpha x^2}.$$

Für $x \in [0,1]$ ist $f'(x) < 0$. Damit ist f streng monoton fallend auf $[0,1]$. Da $f(0) = 1$, $0 < f(1) = e^{-\alpha} < 1$ und f streng monoton fallend auf $[0,1]$ ist, gilt $f([0,1]) \subset [0,1]$. **(2)**

Kontraktion: Die zweite Ableitung von f ist

$$f''(x) = (-2\alpha + 4\alpha^2 x^2)e^{-\alpha x^2}.$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| < 1$$

für alle $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ gilt. Es gilt

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\alpha}}$$

(1)

Die Lösung $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\alpha}}$ liegt nicht in $[0,1]$. Jedoch gilt $0 < \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\alpha}} < 1$. Wir müssen also drei Punkte betrachten:

$$|f'(0)| = 0 < 1 \qquad |f'(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\alpha}})| = |\sqrt{2\alpha}e^{-\frac{1}{2}}| < |\sqrt{2\frac{3}{4}}e^{-\frac{1}{2}}| < 0.8 < 1 \qquad |f'(1)| = 2\alpha e^{-\alpha} < 2\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{2}} < 0.91 < 1.$$

(3)

f hat damit nach dem Banachschen Fixpunktsatz auf $[0,1]$ für alle $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ genau einen Fixpunkt.

Aufgabe 4 (2+2+3=7 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	1	3

a) Berechnen Sie die drei fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_0=-1 & [x_0]f \\
 & & \searrow \\
x_1 = 0 & 2 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \searrow & & \searrow \\
x_2=1 & 1 & \longrightarrow & [x_1,x_2]f & \longrightarrow & -1 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_3=2 & 3 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3/2 & \longrightarrow & [x_0,x_1,x_2,x_3]f
\end{array}$$

b) Stellen Sie für das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 zur gegebenen Wertetabelle die Newton-Darstellung auf und berechnen Sie anschließend $p_3(0)$ durch Horner-artige Auswertung der Newton-Darstellung.

c) Für die n-ten Ableitungen von f gelte $\max_{x\in[-1,2]} |f^{(n)}(x)| \leq 6 \cdot 2^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie unter dieser Annahme eine möglichst scharfe Abschätzung für $|f(0.5) - p_3(0.5)|$.

Zu (a): Wir erhalten

$$\begin{aligned}
[x_0]f &= f(x_0) = 1, \\
[x_1,x_2]f &= \frac{[x_2]f - [x_1]f}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{1-0} = -1, \\
[x_0,x_1,x_2,x_3]f &= \frac{[x_3,x_2,x_1]f - [x_2,x_1,x_0]f}{x_3 - x_0} = \frac{3/2-(-1)}{2-(-1)} = 5/6 = 0.83333.
\end{aligned} \qquad \mathbf{(2)}$$

Zu (b): Die Newton-Darstellung von p_3 lautet

$$p_3(x) = 1 + (x+1) - (x+1)x + \frac{5}{6}(x+1)x(x-1)\,. \qquad \mathbf{(1)}$$

Auswertung in Horner-artiger Form ergibt

$$p_3(0) = 1 + (0+1)(1 + 0(-1 + \frac{5}{6}(0-1)) = 2\,. \qquad \mathbf{(1)}$$

Zu (c): Aus der Darstellung des Interpolationsfehlers (siehe Formelsammlung) und der Abschätzung für die Ableitungen folgt

$$\begin{aligned}
|f(0.5) - p_3(0.5)| &\leq \Big|\prod_{i=0}^{3}(0.5 - x_i)\Big| \max_{y\in[-1,2]} \frac{|f^{(4)}(y)|}{4!} \\
&= 1.5 \cdot 0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1.5) \frac{6 \cdot 2^5}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 4.5\,.
\end{aligned} \qquad \mathbf{(3)}$$

Aufgabe 5 (3+5+2 = 10 Punkte)

Es sei $f(x) := e^{\frac{x^2}{3}-x}$. Wir betrachten das Integral

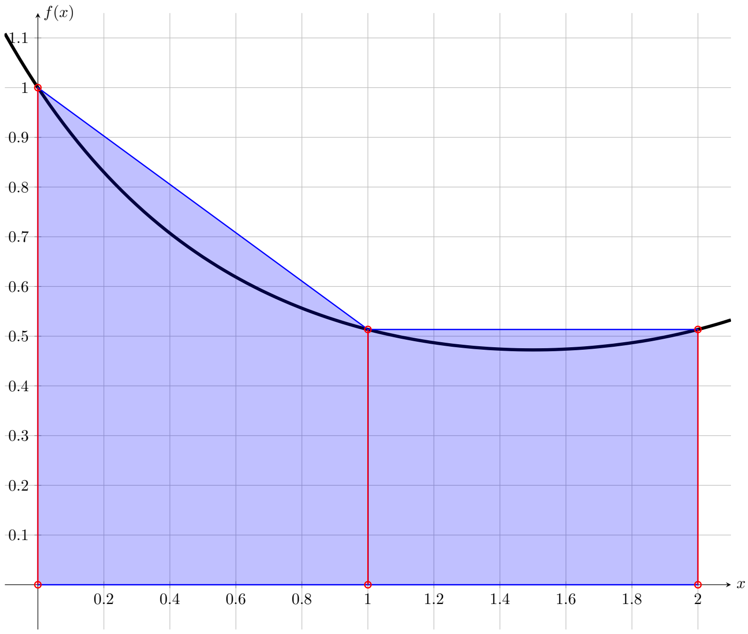
$$\int_0^2 e^{\frac{x^2}{3}-x}\,\mathrm{d}x$$

und seine numerische Approximation.

a) Wir möchten das Integral mit Hilfe der summierten Trapezregel mit der Schrittlänge $h = 1$ approximieren. Zeichnen Sie die Fläche, die mit dieser Quadraturregel ausgerechnet wird, in die Abbildung (s.u.) ein. Schreiben Sie die numerischen Werte der Stellen, an denen f ausgewertet werden muss, in die Skizze.

b) Bestimmen Sie für die summierte Trapezregel eine geeignete Schrittweite h so, dass der Quadraturfehler unter der Schranke $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-1}$ bleibt.
Hinweis: Ohne Beweis darf verwendet werden: Für alle Ableitungen von f gilt $|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(0)|$ für $x \in [0, 2]$.

c) Berechnen Sie die numerische Approximation des Integrals mit Hilfe der summierten Trapezregel für $h = \frac{2}{3}$.



a)

Für das Intervall $I = [0, 2]$ und $h = 1$ haben wir für die summierte Regel die Teilintervalle $I_0 = [0, 1]$ und $I_1 = [1, 2]$. Als Stützstellen erhalten wir $x_{00} = 0$ und $x_{01} = 1$ sowie $x_{10} = 1$ und $x_{11} = 2$. Nun müssen nur noch die Geraden durch die zugehörigen Werte gelegt werden.

(3)

b) Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt

$$|I(f) - T(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{z\in[a,b]} |f''(z)|$$

Für die Ableitungen haben wir:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x - 1\right) e^{\left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)},$$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2\right) e^{\left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)} = \left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}\right) e^{\left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)}$$

(3)

Gemäß **Hinweis** gilt auf $[0, 2]$:

$$|f''(x)| \leq \frac{5}{3} e^0 = \frac{5}{3}$$

Somit gilt

$$|I(f) - T(f)| \leq \frac{2}{12}\, h^2\, \frac{5}{3} \overset{!}{\leq} 1 \cdot 10^{-1}.$$

Dies ist für $h \leq \sqrt{3.6 \cdot 10^{-1}} = \frac{6}{10} = 0.6 =: \tilde{h}$ erfüllt. Folglich $n \geq 2/\tilde{h} = \frac{10}{3} = 3.3\ldots$ und somit $n = 4$ sowie $h = 0.5$.

(2)

c)

$$\begin{aligned} T(f) &= \frac{\frac{2}{3}}{2}\,(f(0) + 2 \cdot f(2/3) + 2 \cdot f(4/3) + f(2)) \\ &= \frac{1}{3}(1 + 2 \cdot 0.59540 + 2 \cdot 0.47676 + 0.51342) \\ &= 2.7433 \end{aligned}$$

(2)