

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die exakte Lösung ist $x = \left(\frac{10000}{10001}, \frac{10002}{10001} \right)^T$.

- Lösen Sie $Ax = b$ in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *ohne* Spaltenpivotisierung.
- Lösen Sie $Ax = b$ in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Spaltenpivotisierung.
- Vergleichen Sie die Lösungen aus a) und b) mit der exakten Lösung, indem Sie die relativen Fehler (in der Maximumnorm) berechnen, und erklären Sie Ihre Beobachtung.

Aufgabe 2

(6 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = e^{-x} \sin x + \frac{1}{2}(1 - x)$$

hat je eine Nullstelle in den Intervallen $[-0.6, -0.4]$ und $[1.4, 1.6]$, wobei das Argument der Sinusfunktion im Bogenmaß zu nehmen ist.

- Bestimmen Sie die negative Nullstelle mit dem Bisektionsverfahren bis auf einen *relativen* Fehler von höchstens 15 %.
- Bestimmen Sie die positive Nullstelle mittels der ersten beiden Schritte des Sekantenverfahrens (d. h. ausgehend von zwei Startwerten x_0 und x_1 soll eine Näherung x_3 berechnet werden).

Aufgabe 3

(6 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-1	0	1	2
f_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

- Berechnen Sie das Interpolationspolynom in der Newton-Form zu den Stützstellen $x_i = 0, 1, 2$.
- Berechnen Sie das Interpolationspolynom in der Newton-Form zu allen Stützstellen $x_i = -1, 0, 1, 2$.
- Die den Daten zugrundeliegende Funktion ist $f(x) = \cos(\pi x/3)$. Schätzen Sie den Interpolationsfehler des Interpolationspolynoms aus Teil b) an der Stelle $x = -1/4$ ab.