

Aufgabe 10 (Ausgleichsproblem)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -1 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 1 & 0 & 2 \end{array}.$$

Bestimmen Sie die Parabel $y(t) = at^2 + bt$ so, daß die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^3 (y(t_i) - y_i)^2$ minimal wird. Formulieren Sie dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $\|Ax - f\|_2 \rightarrow \min$, lösen Sie dieses und berechnen Sie das Residuum. Benutzen Sie zur Lösung die Normalgleichungen.

7 Punkte

Aufgabe 11 (Integration)

Für das Integral

$$I = \int_0^2 e^{\sin x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

- a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der summierten Simpsonregel, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$ zu erreichen?

Hinweis: Für $f(x) = e^{\sin x}$ gilt $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(4)}(\xi)| = 4 \cdot e$ und der Fehler der summierten Simpsonregel läßt sich durch $(b - a) = n \cdot h$

$$\frac{b - a}{2880} h^4 \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

abschätzen.

- b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I , indem Sie $n = 2$ setzen.

7 Punkte

Aufgabe 12 (L-R-Zerlegung mit Pivotisierung)

Gegeben ist das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie für A die L - R -Zerlegung mit Pivotisierung.
 b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der L - R -Zerlegung aus a).

7 Punkte

Aufgabe 13 (nichtlineare Gleichungen)

Die Gleichung $e^x = x^2$ besitzt auf \mathbb{R} genau eine Lösung, die approximativ bestimmt werden soll.

- a) Verschaffen Sie sich mittels einer geeigneten Skizze eine ganzzahlige Näherung.
 b) Verbessern Sie die Näherung aus a) durch zwei Schritte des Newtonverfahrens.

7 Punkte