Aufgabe N1
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PA = LR$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist. Geben sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR–Zerlegung.

Aufgabe N2
Gegeben sei die folgende Meßreihe

x_i	1	2	4
f_i	2.5	1.5	2

Aufgrund theoretischer Überlegungen weiß man, daß diese Meßdaten einer Funktion

$$f(x) = a \cdot (x - 1) + \frac{b}{x}$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu zunächst das entsprechende lineare Ausgleichsproblem. Lösen sie dieses anschließend mittels Normalgleichungen.

Aufgabe N3
Gesucht ist eine Nullstelle der Funktion

$$f(x) = e^{-x} \cos(x) - x$$

im Intervall $I = [0, 1]$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes, daß f in I genau eine Nullstelle besitzt.

b) Führen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0.5$, zwei Iterationen des Fixpunktverfahrens durch und geben Sie für die letzte Approximation eine Fehlerabschätzung an.

c) Nennen Sie ein Verfahren, das ein besseres Konvergenzverhalten hat (Begründung!). Geben Sie die Iterationsvorschrift für dieses Problem explizit an.

Aufgabe N4
Das Integral

$$I := \int_0^4 f(x)\,dx, \qquad f(x) := \arctan(x),$$

soll mit summierten Newton–Cotes–Formeln näherungsweise bestimmt werden.

a) Approximieren Sie I mit der summierten Simpsonregel für $n = 2$ und geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.

b) Bestimmen Sie die Anzahl n der Teilintervalle so, dass die summierte Trapezregel den Fehler $\epsilon = 10^{-4}$ nicht überschreitet.

c) Skizzieren Sie die summierte Trapezregel mit $n = 2$ für dieses Integral. Warum ist der approximative Wert für diese Funktion kleiner als der tatsächliche Integralwert? Gilt das für jede Anzahl n von Teilintervallen?

Hinweis: Es gilt

$$f''(x) = \frac{-2\,x}{(1+x^2)^2}, \; f'''(x) = \frac{2\,(3\,x^2-1)}{(1+x^2)^3}, \; f^{(4)}(x) = \frac{24\,x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^4}, \; f^{(5)}(x) = \frac{24\,(5\,x^4 - 10\,x^2 + 1)}{(1+x^2)^5}.$$