Aufgabe N1 (4.5 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit ($\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & \beta \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung (ohne Pivotisierung) von A unter der Vorausssetzung, daß sie existiert.

b) Für welche Werte von α und β ist die LR–Zerlegung ohne Pivotisierung durchführbar? Für welche Werte ist **zusätzlich** das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ eindeutig lösbar?

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ für $\alpha = 2,\ \beta = 1$ mit Hilfe der in a) bestimmten LR–Zerlegung.

Aufgabe N2 (4.5 Punkte)

Gegeben sind die vier Meßwerte

t_i	-2	-1	1	2
y_i	2	0	1	4

, die der Theorie nach zu einer Funktion der Form $y(t) = \alpha\, t^2 + \beta\, t$ gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Lösen Sie obiges Ausgleichsproblem ausnahmsweise mittels der Normalgleichungen und geben Sie α und β sowie das Residuum explizit an.

Aufgabe N3 (4.5 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $e^{-x} = \dfrac{1}{2}\,(x-1)^2,\ x \in \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Seiten der Gleichung und geben Sie ein **ganzzahliges** Intervall I an, in dem die (eindeutige) Lösung liegt.

b) Führen Sie zwei Schritte mit dem Newtonverfahren aus, wobei Sie als Startwert den Mittelpunkt des in a) bestimmten Intervalls I nehmen sollen.

c) Führen Sie zwei Schritte mit dem Sekantenverfahren aus, wobei Sie als Startwerte die Randwerte des in a) bestimmten Intervalls I nehmen sollen.

d) Welches sind die Vorteile des Sekantenverfahrens gegenüber dem Newtonverfahren?

Aufgabe N4 (4.5 Punkte)

Gegeben sei folgende Wertetabelle der Funktion $f(x) = \tan(x)$:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.5
$f(x)$	0.0	0.25534	0.54630	0.93160	1.5574	3.0096	14.101

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.2)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 3. Wählen Sie dazu die Stützstellen geeignet aus.
Hinweis: Nutzen Sie aus, daß f punktsymmetrisch im Ursprung ist.

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den Näherungswert an.
Hinweis: Es gilt

$$f'(x) = 1 + \tan(x)^2,\ f''(x) = 2\,\tan(x)\,\left(1 + \tan(x)^2\right),\ f'''(x) = 2\,\left(1 + \tan(x)^2\right)\,\left(1 + 3\,\tan(x)^2\right),$$

$$f^{(4)}(x) = 8\,\tan(x)\,\left(1 + \tan(x)^2\right)\,\left(2 + 3\,\tan(x)^2\right),\ f^{(5)}(x) = 8\,\left(1 + \tan(x)^2\right)\,\left(2 + 15\,\tan(x)^2 + 15\,\tan(x)^4\right),$$

$$f^{(6)}(x) = 16\,\tan(x)\,\left(1 + \tan(x)^2\right)\,\left(17 + 60\,\tan(x)^2 + 45\,\tan(x)^4\right).$$