Aufgabe 10: (Lineare Gleichungssysteme)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung von A, und lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe dieser Zerlegung.

b) Nennen Sie einen Vorteil der QR–Zerlegung gegenüber der LR–Zerlegung. Welchen Vorteil bietet die LR–Zerlegung?

(3 + 2 Punkte)

Aufgabe 11: (Lineare Ausgleichsrechnung)

Die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ der Parabel $p(x) = (x-a)^2 + b$ sollen so gewählt werden, daß die folgenden Meßwerte f_i im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal approximiert werden.

i	1	2	3
x_i	-1	1	$\sqrt{3}$
f_i	3	1	2

a) Formulieren sie ein zu obigem Problem äquivalentes *lineares* Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens–Rotationen, ohne zu den Normalgleichungen überzugehen. Was sind die optimalen Werte der Parameter a und b?

c) Erläutern Sie, warum es im allgemeinen nicht sinnvoll ist, statt wie oben vorzugehen, die Normalgleichungen zu lösen.

(2 + 3 + 2 Punkte)

Aufgabe 12: (Iterative Verfahren)

Der Schnittstelle der Graphen von

$$f(x) = x^3 \qquad \text{und} \qquad g(x) = e^{\sin(x)}$$

soll mit Hilfe eines iterativen Verfahrens bestimmt werden.

a) Formulieren Sie eine Fixpunktiteration zur Lösung des obigen Problems, und zeigen Sie, daß die Iteration für jeden Startwert aus einem geeigneten, von Ihnen zu wählenden Intervall I konvergiert.

b) Definieren Sie den Begriff der Konvergenzordnung p einer konvergenten Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Welche Konvergenzordnung hat das in a) konstruierte Verfahren?

c) Konstruieren Sie ein Verfahren, das lokal quadratisch gegen die Lösung von $f(x) = g(x)$ konvergiert. Geben Sie die Iterationsvorschrift explizit an.

(3 + 2 + 2 Punkte)

Aufgabe 13: (Polynominterpolation)

Zu der Funktion

$$f(x) = \int_0^x e^\tau \cos(\tau)\, d\tau$$

sind die Funktionswerte an den äquidistanten Stützstellen $x_i = \frac{i}{2}, i = 0, 1, 2,$ in der folgenden Tabelle gegeben.

x_i	0	0.5	1
$f(x_i)$	0	0.61866	1.3780

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom $P(f \,|\, x_0, x_1, x_2)(x)$ in der Newton–Form.

b) Schätzen Sie den Fehler $|f(x) - P(f \,|\, x_0, x_1, x_2)(x)|$ auf $[0, 1]$ möglichst scharf ab.

c) Wir betrachten jetzt die Stützstellen $t_0 = 1$ und $t_1 = 1 + h$ für ein $h > 0$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f \,|\, t_0, t_1)(x)$ im Grenzfall $h \to 0$.

(3 + 3 + 3 Punkte)