Aufgabe 10 (Lineare Gleichungssyteme):

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \frac{1}{3} \\ \sqrt{2} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit **Givens-Rotationen**.

b) Statt b sei ein Vektor $\tilde{b}$ mit $\|b - \tilde{b}\|_2 \leq 10^{-3}$ gegeben. Schätzen Sie den daraus resultierenden relativen Fehler in x bezüglich der Norm $\|\cdot\|_2$ ab.
Hinweis: Benutzen Sie die QR-Zerlegung von A aus Teil a), um die Kondition $\kappa_2(A)$ zu berechnen.

(4 + 3 Punkte)

Aufgabe 11 (Nichtlineare Gleichungssysteme):

a) Führen Sie für das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \cos(x) &= y^2 \\ \sin(x+y) &= e^y \end{aligned}$$

zwei Schritte des vereinfachten Newton-Verfahrens zum Startwert $(0, -\pi/4)^T$ durch. Rechnen Sie dabei mit 4 signifikanten Dezimalstellen Genauigkeit.

b) Nennen Sie einen Vor- und einen Nachteil des vereinfachten gegenüber dem unmodifizierten Newton-Verfahren.

(4 + 2 Punkte)

Aufgabe 12 (Linearer Ausgleich):

Es seien die Funktionen

$$f(x) = a\cos(x) \qquad \text{und} \qquad g(x) = bx^3 + x$$

gegeben. Die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ sollen so bestimmt werden, daß der Abstand der Graphen von f und g an den Stellen $x_1 = -\pi/4$, $x_2 = 0$ und $x_3 = \pi/4$ im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate minimal wird.

a) Formulieren Sie das lineare Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe der Normalgleichung.

c) Skizzieren Sie ein Verfahren zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems, das nicht die Normalgleichung benutzt.
Begründen Sie, warum das von Ihnen genannte Verfahren das lineare Ausgleichsproblem löst.
Worin besteht der Vorteil gegenüber der Lösung via Normalgleichung?

(2 + 2 + 3 Punkte)

Aufgabe 13 (Polynominterpolation):

Es sei folgende Wertetabelle der Funktion f gegeben:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x_i)$	0	0.1774	0.3000	0.3552	0.3377	0.2468

a) Interpolieren Sie f mit einem Polynom **3. Grades** so, daß der Interpolationsfehler an der Stelle $x = 0.5$ möglichst klein wird. Benutzen Sie dazu das Schema der dividierten Differenzen, und geben Sie das Interpolationspolynom in der Newton-Form an.

b) f wird jetzt stückweise **linear** interpoliert, d.h., daß für jedes $x \in [0, 1]$ der Wert $f(x)$ durch

$$I(x) := P(x_i, x_{i+1}|f)(x), \qquad x \in [x_i, x_{i+1}],$$

approximiert wird. Schätzen Sie den Fehler

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - I(x)|$$

möglichst scharf ab. Es ist

$$f'(x) = e^{-x^2} - x.$$

(4 + 4 Punkte)