

Matr.–Nr.:

Platz–Nr.:

Klausur zur Numerischen Mathematik für E-Techniker
Prof. Dr. Benjamin Berkels
Donnerstag, 12. August 2021

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Zugelassene Hilfsmittel:

- Die vom Institut zur Klausur verteilte Formelsammlung, die Sie mit Namen und Matrikelnummer versehen.
- **Höchstens ein** Taschenrechner, der explizit vom Institut zugelassen wurde und auf der “Positiv-Liste” steht, die zu Klausurbeginn auch *aufliegt*.
ACHTUNG: Die Benutzung eines anderen Taschenrechners gilt als Täuschungsversuch!

Benutzter Taschenrechner (genaue Typenbezeichnung) : _____

Sie haben insgesamt 90 Minuten Zeit zur Bearbeitung. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 50% der Gesamtpunktzahl erreicht werden. Bitte beginnen Sie mit der Bearbeitung der Aufgabe direkt unter der Aufgabenstellung. Sollte der Platz unterhalb der Aufgabe nicht ausreichen, so setzen Sie die Aufgabe bitte auf der rechten Seite fort. Wenn auch das noch nicht ausreicht, so fahren Sie auf einem der hinteren Leerblätter fort und geben dies bitte vorne mit einem Hinweis an.

Hinweis für den Rechenteil: Bitte kreuzen Sie die von Ihnen gefundenen Lösungen in der Tabelle vor Beginn des Rechenteils (auf S. 7) an. Nur diese Tabelle wird gewertet.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer — auch die benutzten Blanko-Blätter.

Ich versichere mit meiner Unterschrift auch, dass ich nur den oben eingetragenen Taschenrechner benutze, der sich zudem auf der “Positiv-Liste” befindet und dass ich keine sonstigen elektronischen Geräte wie Handy, Tablet, Smartwatch, MP3-Player usw. bei mir habe.

Name: _____

Vorname: _____

Unterschrift: _____

VFr:	A1:	A2:	A3:	A4:	A5:	BP:	$\sum$:
------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----------

Verständnisfragen-Teil

(36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie $\text{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen und $\mathbb{D} := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	Die Anzahl der Maschinenzahlen in $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ hängt von $R - r$ ab.	
2.	Die Zahl 19 ist in $\mathbb{M}(4, 2, -5, 7)$ exakt darstellbar.	
3.	In $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$ gilt $x_{\min} = 10^{-8}$.	
4.	Die Addition zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer gut konditioniert.	
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 22 in $\mathbb{M}(4, 8, -8, 8)$ an.	
6.	Es gilt $\left \frac{\text{fl}(x) - x}{x} \right \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
7.	Die Kondition eines Problems ist unabhängig vom Lösungsweg, bzw. Algorithmus.	
8.	Je besser die Kondition eines Problems desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
9.	Die Funktion $f(x) = x \ln x$ ist schlecht konditioniert für alle x mit $ x \approx 1$.	
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{\text{rel}}(x)$ der Funktion $f(x) = x^3 \ln(x)$ für $x \rightarrow \infty$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Für $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des gestörten Problems $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Dann gilt $\ \tilde{x} - x\ /\ x\ \leq \ A\ \ \tilde{b} - b\ /\ b\ $.	
2.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A) \geq 1$.	
3.	Es sei $B := D_z A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A . Dann gilt $\kappa_\infty(B) \leq \kappa_\infty(DA)$ für jede reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Hierbei ist $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich $\ \cdot\ _\infty$.	
4.	Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Dann gilt $\det Q = 1$.	
5.	Berechnen Sie $\ A\ _1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.	
6.	Es existiert eine normierte untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A = LR$.	
7.	Pivotisierung verbessert die Kondition des Gleichungssystems $Ax = b$.	
8.	Der Aufwand zur Bestimmung der LR -Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen (gem. Vorl./Buch).	
9.	Die QR -Zerlegung existiert auch für nicht-quadratische Matrizen	
10.	Berechnen Sie $\kappa_2(A)$ der Matrix $= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m > n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $\text{Rang}(A) = n$ (wenn nicht anders erwähnt), $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, obere Dreiecksmatrizen so, dass $QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Zudem sei $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$ die eindeutige Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichproblems. Ebenso sei $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten ebenfalls das zugehörige (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(\hat{x})\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$.		
1.	Im Falle $\text{Rang}(A) < n$ ist die Zerlegung $QA = R$ nicht über Householder-Transformationen durchführbar.	
2.	Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $A^T(Ay - b) = 0$. Dann folgt $y = x^*$.	
3.	Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $\ Ax - b\ _2^2 = \ \tilde{R}x - b_1\ _2^2 + \ b_2\ _2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
4.	Die Kondition des Minimierungsproblems $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$ hängt nicht von b ab.	
5.	Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Qb = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\ Ax^* - b\ _2^2$.	
6.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton Methode ist immer maximal 1.	
7.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein lineares Ausgleichsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ _2$, mit einer Matrix A , die vollen Spaltenrang hat.	
8.	Die Gauß-Newton Methode ist in einer hinreichend kleinen Umgebung der Lösung immer konvergent.	
9.	Die Gauß-Newton Methode kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
10.	Bestimmen Sie $\frac{\ A^T Ax^*\ }{\ A^T b\ }$ für $b \neq 0$.	

VF-4: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f x_0, \dots, x_n) \in \Pi_n$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n , das die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ interpoliert. Weiter sei $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .		
1.	Es gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = P(f x_0, \dots, x_{n-1})(x) + [x_0, \dots, x_n]f \Pi_{i=0}^n(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
2.	Der Fehler $\max_{x \in [a, b]} P(f x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ ist minimal, wenn die Stützstellen äquidistant sind.	
3.	Es gilt $Q(x) = P(Q x_0, \dots, x_n)(x)$ für alle $Q \in \Pi_n$.	
4.	Es sei $n = 4$. Dann gilt $P(f x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)(x) = P(f x_3, x_1, x_2, x_4, x_0)(x)$ für alle x .	
5.	Es seien $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $f(x_0) = 2$ und $f(x_1) = 1$. Berechnen Sie $P(f x_0, x_1)(0)$.	
Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.		
6.	Bei der Gauß-Quadratur sind die Gewichte w_j stets nichtnegativ.	
7.	Bei den Newton-Cotes Formeln hängen die Gewichte w_j von den Intervallgrenzen a und b ab.	
8.	Es sei $I_1(f)$ die Trapezregel. Es gilt $ I_1^n(f) - I(f) \leq ch^2$, wobei die Konstante c nicht von n abhängt.	
9.	Es sei I_m die Newton-Cotes Formel. Dann gilt $I_m^n(f) = I(f)$ für alle $f \in \Pi_m$.	
10.	Berechnen Sie die Approximation von $\int_0^2 x^3 dx$ mit der Simpsonregel.	

Klausur Numerik ET WS20/21

**Kreuzen Sie hier die von Ihnen hinten gefundenen Lösungen an.
Nur die auf dieser Seite angekreuzten Lösungen werden gewertet.**

Nr	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1a)										
1b)										
1c)										
1d)										
1e)										

Nr	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2a)										
2b)										
2c)										
2d)										

Nr	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
3a)										
3b)										
3c)										
3d)										
3e)										
3f)										

Nr	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4a)										
4b)										
4c)										
4d)										
4e)										
4f)										

Nr	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
5a)										
5b)										
5c)										
5d)										

Aufgabe 1

(2+2+1+1+2 = 8 Punkte)

Es sei $\alpha \neq 1$ eine Konstante, sowie

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 6 \\ 3 & \alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die LR -Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von A , d.h. $PA(\alpha) = L(\alpha)R(\alpha)$.**1a)** Geben Sie den Wert $\sum_{i,j} |(L(\alpha))_{ij}|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i,j} (L(\alpha))_{ij} $	4	4.5	2α	121	128	7	-4	30	102	48

1b) Geben Sie den Wert $\max_{\alpha \in [-1,0]} |\det(R(\alpha))|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\max_{\alpha \in [-1,0]} \det(R(\alpha)) $	24	60	14	2	9	36	7	13	1.5	32

1c) Geben Sie den Wert $\sum_i |P_{ii}|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_i P_{ii} $	0	1	4.5	3	2	4	3.5	2.5	1.5	0.5

Gesucht ist das Polynom zweiten Grades

$$p(x) = a + bx + cx^2 \quad \text{mit} \quad p(20) = 100, \quad p(21) = 0, \quad p(22) = -102.$$

In der klassischen Monombasis führt dies auf das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 20 & 400 \\ 1 & 21 & 441 \\ 1 & 22 & 484 \end{pmatrix}}_{=:B} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{=:z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ -102 \end{pmatrix}}_{=:z}.$$

Hinweis: Es gilt

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 231 & -440 & 210 \\ -21.5 & 42 & -20.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1d) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_{\infty}(B)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\kappa_{\infty}(B)$	446667	534751	1535178	1492157	39277	13589241	531645	46484763	3480241	2498731

1e) Eine Approximation der Kondition hat $\kappa_{\infty}(B) = 1224000$ ergeben. Verwenden Sie diese Approximation für die folgende Aufgabe: Angenommen, die rechte Seite z ist mit einem absoluten Fehler von 0.5 in der ∞ -Norm behaftet. Schätzen Sie den relativen Fehler $r_{(a,b,c)}$ in den Koeffizienten $(a, b, c)^T$ in der ∞ -Norm ab.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$r_{(a,b,c)}$	6000	6200	4200	5300	8400	9000	9600	8100	4800	9200

Aufgabe 2

(3+2+1+1 = 7 Punkte)

Die Funktion

$$y(t) := \alpha(-10t^2 + 14) + \beta(12t^2 - 19t) - 12$$

soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0	1	2
y_i	-10	-12	14

Bestimmen Sie die Parameter α und β optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate:

2a) Bestimmen Sie zu dem entsprechenden linearen Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ die Matrix $A = (A_{ij})$ und den Vektor $b = (b_i)$. Geben Sie $\sum_{i,j} |A_{ij}| + \sum_i |b_i|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i,j} A_{ij} + \sum_i b_i $	89	23	32	39	34	98	122	134	45	79

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems mit Hilfe von einer Householder-Transformation wird $(B|c)$ in $(B^{(1)}|c^{(1)})$ überführt.

2b) Berechnen Sie $(B^{(1)}|c^{(1)})$ und geben Sie $s^{(1)} = \sum_{i,j} B_{ij}^{(1)} + \sum_i c_i^{(1)}$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$s^{(1)}$	16	11	8.5	-11.5	22	1	-2	8	15	-19

2c) Geben Sie die Lösung x^* an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x^*	-0.6	-0.3	1.3	3.6	0.9	-4.6	-0.14	0.5	-1.2	-7.4

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}} \|Cx - d\|_2$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2d) Geben Sie die Norm des Residuums, d.h. $\|Cx^* - d\|_2$, an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\ Cx^* - d\ _2$	5	$\sqrt{29}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{47}$	29	25	42	$\sqrt{32}$	26

Aufgabe 3

(2+2+2+3+1+2 = 12 Punkte)

Gegeben sei die Fixpunktgleichung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) + 0.2 \\ \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin\left(\frac{y}{2}\right) - 0.1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Für $D = [-1, 1]^2$ gilt $F(D) \subset \tilde{D} = I_x \times I_y = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$. Bestimmen Sie ein möglichst kleines $\tilde{D}$. Benutzen Sie dazu keine Ableitungen, sondern schätzen Sie die einzelnen Terme (Faktoren, Summanden), die nur von x bzw. y abhängen, nach oben und unten ab.

3a) Geben Sie $dx = x_1 - x_0$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
dx	0.98962	0.99538	1.1667	2.667	3.1667	4.667	5.1667	1.667	2.1667	3.667

3b) Geben Sie $dy = y_1 - y_0$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
dy	0.47946	0.31962	1.1667	2.667	3.1667	4.667	5.1667	1.667	2.1667	3.667

3c) Berechnen Sie $F' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sowie $J = F' \begin{pmatrix} 0.5 \\ \pi \end{pmatrix}$ und geben Sie $\|J\|_\infty$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\ J\ _\infty$	0.3894	0.2596	1.1667	2.667	3.1667	4.667	5.1667	1.667	2.1667	3.667

Es sei ab jetzt

$$\tilde{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \sin\left(\frac{x}{6}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) - 0.2 \\ \frac{1}{3} e^{-x^2} \sin\left(\frac{y}{2}\right) + 0.2 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{F}' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{6}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) & -\frac{3}{2} \sin\left(\frac{x}{6}\right) \sin\left(\frac{y}{2}\right) \\ -\frac{2}{3} x e^{-x^2} \sin\left(\frac{y}{2}\right) & \frac{1}{6} e^{-x^2} \cos\left(\frac{y}{2}\right) \end{pmatrix}$$

eine Fixpunktfunktion, die ebenfalls D in sich abbildet.

3d) Bestimmen Sie für $\tilde{F}$ eine möglichst kleine Kontraktionszahl L_1 für die 1-Norm. Benutzen Sie dazu wieder keine Ableitungen, sondern schätzen Sie die einzelnen Terme (Faktoren, Summanden), die nur von x bzw. y abhängen, nach oben ab. Geben Sie L_1 an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L_1	0.81962	0.97943	0.16667	0.46667	0.022745	0.0875	0.18372	0.099999	0.22731	0.19483

Wir benutzen ab jetzt $\tilde{L}_1 = 0.65$.

3e) Bestimmen Sie zum Startwert $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die erste Iterierte $\mathbf{x}_1$ des Fixpunktverfahrens und geben Sie $\|\mathbf{x}_1\|_1$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\ \mathbf{x}_1\ _1$	0.4	0.3	4.16667	2.66667	3.1667	4.6667	5.6667	1.6667	2.1667	3.6667

3f) Wieviele Iterationen n sind, für den Startwert aus d) mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um bezüglich der 1-Norm eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.001$ zu erreichen? Geben Sie einen möglichst kleinen Wert für n an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
n	17	25	15	18	23	19	21	27	33	49

Aufgabe 4

(1+1+1+2+2+1 = 8 Punkte)

Für die Funktion f ist folgende Wertetabelle mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben.

x	1	3	α	7	12
$f(x)$	β	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{4}$

Zusätzlich ist das folgende Tableau der dividierten Differenzen mit $\gamma \in \mathbb{R}$ zur Bestimmung des Interpolationspolynoms 4. Grades bekannt.

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+2}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+3}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+4}]f$
1	β				
3	0	$\frac{1}{3}$			
α	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$		
7	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{35}$	$-\frac{1}{105}$	$\frac{1}{105}$	
12	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{84}$	$-\frac{1}{420}$	$\frac{1}{1260}$	γ

4a) Bestimmen Sie α . Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
α	5	4	6	3.5	4.5	5.5	6.5	4.3	5.3	5.7

4b) Bestimmen Sie β . Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
β	$-\frac{2}{3}$	-1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

4c) Bestimmen Sie γ . Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
γ	$-\frac{1}{1260}$	$-\frac{1}{672}$	$\frac{1}{1260}$	$\frac{1}{672}$	$\frac{1}{350}$	$-\frac{1}{350}$	$\frac{1}{1355}$	$-\frac{1}{1355}$	$\frac{1}{820}$	$-\frac{1}{820}$

Die Wahl von anderen Stützstellen ergab das folgende Tableau der dividierten Differenzen:

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+2}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+3}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+4}]f$
2	$-\frac{1}{6}$				
3	0	$\frac{1}{6}$			
4.5	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$		
7	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{189}$	$\frac{1}{189}$	
12	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{84}$	$-\frac{1}{378}$	$\frac{1}{1134}$	$-\frac{1}{2268}$

Rechnen Sie von nun an in der gesamten weiteren Aufgabe mit diesen Werten (nicht mit den von Ihnen berechneten). Wir bezeichnen das Polynom 2. Grades, welches die Funktion f an den Stützstellen $x_0 = 2, x_1 = 3$ und $x_2 = 4.5$ interpoliert mit $P_2 = P(f|x_0, x_1, x_2)$.

4d) Bestimmen Sie $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und geben Sie die Summe der Koeffizienten $\sum_{i=0}^2 a_i$ an. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i=0}^2 a_i$	$-\frac{11}{27}$	$-\frac{11}{18}$	0.65	$-\frac{7}{20}$	0.72	$-\frac{2}{5}$	0.94	-0.6	$\frac{11}{100}$	-1.45

Wir nutzen das Tableau aus Aufgabenteil d) und schätzen den maximalen Fehler der Interpolation durch das Interpolationspolynom 2. Grades ab. Wir sind interessiert an einer Abschätzung für $\max_{x \in [x_0, x_2]} |f(x) - P_2(x)|$.

4e) Bestimmen Sie das für die Fehlerschätzung benötigte Knotenpolynom $\omega(x) = \sum_{i=0}^k b_i x^i$, $k \in \mathbb{N}$ und geben Sie die Summe der Koeffizienten $\sum_{i=0}^k b_i$ an. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i=0}^k b_i$	-7	7310.25	1.5	3.45	5.8	1460.5	1850	2377.8	3507.1	3733.3

4f) Geben Sie mittels numerischer Differentiation und dem Tableau der dividierten Differenzen aus Aufgabenteil d) eine Approximation $D^{(4)}$ für $f^{(4)}(x)$ für $x \in [x_0, \dots, x_4]$ an. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$D^{(4)}$	$-\frac{2}{189}$	$-\frac{1}{63}$	$-\frac{1}{1512}$	$-\frac{1}{2268}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$

Aufgabe 5

(3+1+3+2=9 Punkte)

Wir nutzen die Quadraturformel $Q(f) = \frac{1}{2}c_0f(0) + \frac{1}{3}c_1f(x_1)$ zur Approximation des Integrals $\int_0^1 f(x)dx$.

5a) Bestimmen Sie (c_1, x_1) , sodass die Quadraturformel für alle Polynome der Form $P(x) = ax^2 + bx$ exakt ist. Rechnen Sie exakt.

Sie müssen in dieser Teilaufgabe nicht c_0 bestimmen und die Quadraturformel nicht auf konstante Polynome anwenden.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
(c_1, x_1)	$(\frac{9}{4}, \frac{2}{3})$	$(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$	$(\frac{9}{4}, \frac{1}{3})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$	$(\frac{5}{2}, \frac{2}{3})$	$(\frac{9}{4}, \frac{1}{3})$	$(\frac{3}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$	$(1, \frac{2}{3})$

5b) Eine andere Rechnung ergab die Werte $c_1 = \frac{7}{5}$ und $x_1 = 0.65$. Nutzen Sie diese Werte und bestimmen Sie c_0 so, dass die Quadraturformel für alle konstanten Polynome exakt ist. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
c_0	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{19}{9}$	$\frac{26}{21}$

Wir betrachten nun die Funktion $f(x) = \cos(2x) + 4x^2$, welche auf dem Intervall $[-1, 1]$ numerisch integriert werden soll. Dazu wird die n -fach summierte Gauß-Quadratur G_m^n genutzt, wobei auf jedem Teilintervall eine Gauß-Quadratur mit $m + 1$ Stützstellen verwendet wird. Die Quadratur soll eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.001$ erreichen.

Hinweis: Nutzen Sie (ohne Beweis), dass für $x \in [-1, 1]$ gilt: $|f^{(2)}(x)| < 9.7$, $|f^{(3)}(x)| \leq 8$, $|f^{(4)}(x)| \leq 16$, $|f^{(5)}(x)| \leq 32$ und $|f^{(6)}(x)| \leq 64$.

5c) Es sei $m = 1$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche n , sodass die Quadratur mindestens die Genauigkeit ε erreicht. Rechnen Sie so lange wie möglich exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
n	4	2	0	1	3	5	6	7	8	9

Die Anwendung der nicht summierten Gauß-Quadratur mit $m = 1$ ergibt den Wert $2 \cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{8}{3}$.

5d) Bestimmen Sie den tatsächlichen betragsmäßigen Fehler der nicht summierten Quadratur. Rechnen Sie exakt und geben Sie nur das Endergebnis auf 5 signifikante Stellen gerundet an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Error	0.10091	0.45647	0.01943	0.10345	0.27835	0.33894	0.38091	0.42108	0.59104	0.63319

