Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1:		
1.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Gilt dann immer $\|A\|_\infty = \|A\|_1$?	
2.	Gegeben sei die Rotationsmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$. Was ist die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Matrix A in der 2-Norm?	
3.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär. Existiert immer eine LR-Zerlegung $A = L\,R$ von A ?	
4.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär. Existiert immer eine QR-Zerlegung $A = Q\,R$ von A ?	
5.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$. Weiter sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A und es liege nur eine Störung der Eingabedaten b vor. Stimmt es, dass der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler ist ?	

Verständnisfragenblock 2: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$, $Rang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems.		
1.	Ist die Lösung $x^\star$ unter obigen Voraussetzungen immer eindeutig ?	
2.	Ist die Matrix AA^T immer symmetrisch positiv definit ?	
3.	Die QR-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ sei gegeben durch $Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Weiter sei $Q^T b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wie groß ist die Norm des Residuums $\|Ax^\star - b\|_2$?	
4.	Steht der Vektor $Ax^\star - b$ immer senkrecht auf b ?	
5.	Lassen sich die Normalgleichungen immer mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung lösen ?	

Verständnisfragenblock 3: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit Norm $\|\cdot\|$ und Kontraktionskonstante $L = 0.5$ erfüllt.

1.	Konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ?	
2.	Existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$?	
3.	Konvergiert die Fixpunktiteration für Φ angewandt auf Startwerte $x_0 \in D$ höchstens mit Konvergenzordnung 1?	
4.	Muss die Funktion Φ auf D stetig differenzierbar sein?	
5.	Für den Startwert x_0 und die erste Iterierte x_1 mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gelte $\|x_1 - x_0\| = 2$. Wie groß ist der Fehler $\|x_5 - x^*\|$ der 5-ten Iterierten maximal?	

Verständnisfragenblock 4:
Es sei $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f und $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$.

1.	Welchen Wert hat das Interpolationspolynom dritten Gerades $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_3)$ zu den Daten $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 5)$ an der Stelle $x = 1.5$?	
2.	Kann man $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ effizient mit der Newton'schen Interpolationsformel bestimmen ?	
3.	Ist $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f\|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?	
4.	Gilt $\delta_n = \frac{[x_0,\ldots,x_n]f - [x_0,\ldots,x_{n-1}]f}{x_{n-1} - x_0}$?	
5.	Ist der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ für äquidistante Stützstellen minimal?	

Verständnisfragenblock 5: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^{m} \omega_j f(x_j)$, mit $a \le x_0 < \ldots < x_m \le b$.

1.	Hängen die Gewichte ω_j bei Gauß-Quadraturformeln von der Funktion f ab?	
2.	Basieren Newton-Cotes-Formeln auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen ?	
3.	Sei $m = 2$. Hat die Newton-Cotes-Formel dann Gewichte $\omega_0 = 0, \omega_1 = \frac{1}{2}, \omega_2 = 1$?	
4.	Für Polynome p bis einschließlich zu welchem Grad ist die Gauß-Quadratur $Q_5(p)$ exakt, das heißt $Q_5(p) = I(p)$?	
5.	Ist bei derselben Anzahl an Stützstellen der absolute Fehler bei der Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei der entsprechenden Newton-Cotes-Formel?	

Aufgabe 1
Der Ausdruck

$$f := (\sqrt{5} - 2)^2$$

kann mittels Binomischer Formeln umgeformt werden zu

$$(\sqrt{5} - 2)^2 = \left(\frac{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} + 2} \right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^2} = \frac{1}{9 + 4\sqrt{5}} .$$

Welche der Darstellungen $(\sqrt{5} - 2)^2$ und $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$ liefert voraussichtlich das bessere Ergebnis, wenn bei der Auswertung die Näherung $\sqrt{5} \approx 2.2$ verwendet wird? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne f explizit auszuwerten. Schätzen Sie dazu den relativen Fehler ab, der entsteht, wenn man die Näherung $\sqrt{5} \approx 2.2$ benutzt.

7 Punkte

Aufgabe 2
Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6-\beta & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.

b) Bestimmen Sie die Determinante von A in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$.

c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist A symmetrisch positiv definit?

d) Es sein nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^T x = b$. (Berechnung über LR-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

5+2+1+4 = 12 Punkte

Aufgabe 3
Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \exp(2y) + \cos(x-1) &= 3 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 &= 3 \end{aligned}$$

mittels einer Iteration des Newton-Verfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6 Punkte

Aufgabe 4
Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte f_i:

t_i	-1	2	7
f_i	0.4	1.45	2.4

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = b\sqrt{t+a} - \frac{1}{4}a$$

genügen.

a) Zu bestimmen sind die optimalen Parameter a, b im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie das entsprechende <u>nichtlineare</u> Ausgleichsproblem.

b) Für das Gauß-Newton Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 2, b_0 = 1$ gegeben. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.

c) Führen Sie den ersten Schritt mittels Givens-Rotationen durch. Geben Sie anschließend die 2-Norm des Residuums des nichtlinearen Ausgleichsproblems an.

3+5+9 = 17 Punkte

Aufgabe 5

Zur Funktion $f(x) = 2x^2 + 1.8x - 0.72 + 2\cos(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{5}\pi)$ sind folgende Funktionswerte bekannt:

x	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f(x)	0.21826	0	-0.10197	-0.070943	0.11094	0.46197	1	1.7417

Um f an mehreren Stellen im Intervall $[-0.2, 0.22]$ auszuwerten, soll mithilfe der Newtonschen Interpolationsformel ein Interpolationspolynom vom Grad ≤ 2 für f bestimmt werden.

a) Wählen Sie aus obiger Tabelle Stützstellen so aus, dass Sie eine möglichst gute Fehlerschranke für den Interpolationsfehler im Intervall $[-0.2, 0.22]$ bekommen. Begründen Sie Ihre Wahl der Stützstellen.

b) Benutzen Sie die zuvor gewählten Stützstellen, um mithilfe der Newtonschen Interpolationsformel eine Horner-ähnliche Darstellung des Interpolationspolynoms aufzustellen.

c) Wie groß ist der Interpolationsfehler maximal im Intervall $[-0.2, 0.22]$?

2+5+6 = 13 Punkte