Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1:		
1.	Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Ist die Gauß-Elimination dann immer ohne Pivotisierung durchführbar?	
2.	Soll durch Pivotisierung die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden?	
3.	Erfordert bei der Lösung eines Gleichungssystems mittels LR-Zerlegung die Bestimmung der LR-Zerlegnung im Allgemeinen mehr Operationen als das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen ?	
4.	Lassen sich mittels Nachiteration auch Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $det(A) = 0$ eindeutig lösen?	
5.	Sei $A = \begin{pmatrix} 700 & 300 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine reguläre Diagonalmatrix D, so dass $\kappa_\infty(DA)$ minimal wird. Was ist der kleinste Diagonaleintrag von D?	

Verständnisfragenblock 2: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	Ist die Lösung x^* eindeutig?	
2.	Was ist in der Regel die Konvergenzordnung des Levenbert-Marquardt-Verfahrens?	
3.	Ist das Gauß-Newton-Verfahren in einer hinreichend kleinen Umgebung einer Lösung x^* immer konvergent?	
4.	Ergibt sich beim Levenberg-Marquardt-Verfahren in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem?	
5.	Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$ sowie das lineare Ausgleichsproblem finde $z^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $\|Az^\star - b\|_2 = \min_{z\in\mathbb{R}^n} \|Az - b\|_2$. Lässt sich ein solches lineares Ausgleichsproblem stets als orthogonale Projektion von b auf das Bild von A interpretieren?	

Verständnisfragenblock 3:		
1.	Bilden die Iterierten des eindimensionalen Newton-Verfahrens, wenn das Verfahren konvergiert, stets eine monotone Folge?	
2.	Wie viele LR-Zerlegungen müssen für die Durchführung von 3 Schritten des vereinfachten Newton-Verfahrens (für Systeme) berechnet werden, wenn alle auftretenden Gleichungssysteme mittels LR-Zerlegung gelöst werden?	
3.	Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und x^* eine mehrfache Nullstelle von f. Konvergiert das Newton Verfahren dann lokal quadratisch gegen x^*?	
4.	Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt, sowie $\|\Phi'(x^*)\| < 1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein ?	
5.	Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt, sowie $\|\Phi'(x^*)\| = 0$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 quadratisch?	

Verständnisfragenblock 4: Es sei $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Ist $P(Q \mid x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q ?	
2.	Müssen bei der nachträglichen Hinzunahme einer zusätzlichen Stützstelle zu einem bereits berechneten Neville-Aitken Schema sämtliche Werte neu berechnet werden?	
3.	Existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, ..., n$?	
4.	Bildet $\left\{a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_{n-1} x^{n-1}\right\}$ für geeignete, nicht verschwindende Koeffizienten $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n?	
5.	Es sei $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ und $f(x) = 7x^3 + 2x^2$. Was ist $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$?	

Verständnisfragenblock 5: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $Q\,R = A$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$.

1.	Ist $\kappa_\infty(A) = \kappa_\infty(R)$?	
2.	Ist das Produkt zweier orthogonaler Matrizen eine orthogonale Matrix?	
3.	Definiert die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, v \mapsto \|Qv\|_2$ eine Norm?	
4.	Ist A regulär genau dann, wenn R regulär ist?	
5.	Sei $Q = \begin{pmatrix} cos(2) & sin(2) \\ -sin(2) & cos(2) \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Was ist $\kappa_2(A)$?	

Aufgabe 1

Gegeben sei der Ausdruck

$$f(x) = 1 - \frac{2}{2+x^2}\,.$$

a) $\tilde{x}$ sei ein Näherungswert für $x = \frac{1}{30}$, der mit einem relativen Fehler von maximal 0.01% behaftet ist. Schätzen Sie den relativen Fehler in $f(x)$ ab .

b) Berechnen Sie $f(x)$ für $x = \frac{1}{30}$ in 4-stelliger Gleitpunktarithmetik (das heißt in $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$) sowie mit Taschenrechnergenauigkeit mit folgendem Algorithmus:

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 \\ y_2 &= y_1 + 2 \\ y_3 &= \frac{2}{y_2} \\ y_4 &= 1 - y_3 \end{aligned}$$

c) Ist der in b) angegebene Algorithmus stabil? Begründen Sie ihre Antwort! Falls der Algorithmus nicht stabil ist, geben Sie einen geeigneteren Algorithmus an.

3+3+3 = 9 Punkte

Aufgabe 2

Gegeben sei die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ mit

$$L := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{sowie } b := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der angegebenen Cholesky-Zerlegung von A. (Lösen mittels LR-Zerlegung ergibt 0 Punkte.)

b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

c) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung von

$$B := R^T R \qquad \text{mit } R^T := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Ist B symmetrisch positiv definit?

4+1+3+1 = 9 Punkte

Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte f_i:

x_i	-3	0	4
f_i	-2	-6	48

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(x) = \alpha \cdot x \cos(\pi x) + \beta \cdot (2x - 2)$$

genügen.

a) Zu bestimmen sind die optimalen Parameter α, β im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Stellen Sie ein geeignetes lineares Ausgleichsproblem auf (Messdaten schon einsetzen!).

b) Hat das unter a) formulierte Ausgleichsproblem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Givensrotationen. Geben Sie die Lösung $f(x)$ sowie die $2-$Norm des Residuums explizit an.

2+2+9=13 Punkte

Aufgabe 4

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \cos(x+y) - 3x &= 0\,, \\ \sin(x-y^2) - 4y &= 0 \end{aligned}$$

auf $E := \{(x,y) : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \leq 1\}$

a) Skizzieren Sie E.

b) Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass dieses Gleichungssystem auf E genau eine Lösung x^* besitzt. Formen Sie dazu das Gleichungssystem zu einer geeigneten Fixpunktgleichung um. Verwenden Sie für den Kontraktivitätsbeweis die $\|\cdot\|_\infty$−Norm.

c) Für den Startwert $(x_0, y_0)^T$ und die erste Interierte des Fixpunktverfahrens $(x_1, y_1)^T$ gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.245053\,.$$

Wie viele Schritte sind höchstens notwendig, um die Lösung mit der Genauigkeit $\epsilon = 10^{-5}$, gemessen in der $\|\cdot\|_\infty$−Norm, zu approximieren. Verwenden Sie für die Berechnung die Kontraktionskonstante $L = \frac{3}{4}$.

2+8+2=12 Punkte

Aufgabe 5

Die Funktion $f(x) = cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ soll interpoliert werden. Gegeben ist folgende Tabelle:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f(x)	1.00000	1.02007	1.08107	1.18547	1.33743	1.54308

a) Gesucht ist ein Näherungswert für $f(0.5)$ mit den Neville-Aitken-Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte. Berechnen Sie dazu die im folgenden Tableau fehlenden Werte $P_{4,0}$, $P_{3,1}$, $P_{2,2}$, $P_{5,3}$ und $P_{5,5}$. (unterhalb der Aufgabenstellung)

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$	$P_{i,4}$	$P_{i,5}$
$x_0 = 0$	1.00000					
$x_1 = 0.2$	1.02007	$\rightarrow$ 1.05018				
$x_2 = 0.4$	1.08107	$\rightarrow$ 1.11157	$\rightarrow$ $\mathbf{P_{2,2}}$			
$x_3 = 0.6$	1.18547	$\rightarrow$ $\mathbf{P_{3,1}}$	$\rightarrow$ 1.12784	$\rightarrow$ 1.12769		
$x_4 = 0.8$	$\mathbf{P_{4,0}}$	$\rightarrow$ 1.10949	$\rightarrow$ $\mathbf{P_{4,2} = 1.12732}$	$\rightarrow$ 1.12758	$\rightarrow$ 1.12762	
$x_5 = 1$	1.54308	$\rightarrow$ 1.02896	$\rightarrow$ 1.12962	$\rightarrow$ $\mathbf{P_{5,3}}$	$\rightarrow$ 1.12762	$\rightarrow$ $\mathbf{P_{5,5}}$

Welchen Grades ist das Polynom, das dem Wert von $P_{3,1}$ zu Grunde liegt ?

b) Es ist bekannt, dass $f''(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den Näherungswert $P_{4,2} = 1.12732$ aus dem Tableau in a) an, ohne $f(0.5)$ explizit auszuwerten. (f' darf ausgewertet werden.)

6+6 = 12 Punkte