Verständnisfragen-Teil (25 Punkte)

Jeder der 5 Verständnisfragenblöcke besteht aus 5 Verständnisfragen. Werden alle 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 5 Punkte. Werden 4 von 5 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 3 Punkte. Werden weniger als 4 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.

Verständnisfragenblock 1:		
1.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Gilt dann immer $\|A\|_\infty = \|A\|_1$?	**ja**
2.	Gegeben sei die Rotationsmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$. Was ist die Konditionszahl $\kappa_2(A)$ der Matrix A in der 2-Norm?	**1**
3.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär. Existiert immer eine LR-Zerlegung $A = L\,R$ von A ?	**nein**
4.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär. Existiert immer eine QR-Zerlegung $A = Q\,R$ von A ?	**ja**
5.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$. Weiter sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A und es liege nur eine Störung der Eingabedaten b vor. Stimmt es, dass der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler ist ?	**ja**

Verständnisfragenblock 2: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$, $Rang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems.		
1.	Ist die Lösung $x^\star$ unter obigen Voraussetzungen immer eindeutig ?	**ja**
2.	Ist die Matrix AA^T immer symmetrisch positiv definit ?	**nein**
3.	Die QR-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ sei gegeben durch $Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Weiter sei $Q^T b = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Wie groß ist die Norm des Residuums $\|Ax^\star - b\|_2$?	**5**
4.	Steht der Vektor $Ax^\star - b$ immer senkrecht auf b ?	**nein**
5.	Lassen sich die Normalgleichungen immer mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung lösen ?	**ja**

Verständnisfragenblock 3: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit Norm $\|\cdot\|$ und Kontraktionskonstante $L = 0.5$ erfüllt.		
1.	Konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ?	**nein**
2.	Existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$?	**ja**
3.	Konvergiert die Fixpunktiteration für Φ angewandt auf Startwerte $x_0 \in D$ höchstens mit Konvergenzordnung 1?	**nein**
4.	Muss die Funktion Φ auf D stetig differenzierbar sein?	**nein**
5.	Für den Startwert x_0 und die erste Iterierte x_1 mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gelte $\|x_1 - x_0\| = 2$. Wie groß ist der Fehler $\|x_5 - x^*\|$ der 5-ten Iterierten maximal?	$\frac{1}{8}$

Verständnisfragenblock 4: Es sei $P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)),\ldots,(x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\ldots,x_n]\,f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f und $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$.		
1.	Welchen Wert hat das Interpolationspolynom dritten Gerades $P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_3)$ zu den Daten $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,5)$ an der Stelle $x = 1.5$?	**3.5**
2.	Kann man $P(f \mid x_0,\ldots,x_n)$ effizient mit der Newton'schen Interpolationsformel bestimmen ?	**ja**
3.	Ist $P(f\|x_0,\ldots,x_n)(x) = P(f\|x_0,\ldots,x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?	**ja**
4.	Gilt $\delta_n = \frac{[x_0,\ldots,x_n]f - [x_0,\ldots,x_{n-1}]f}{x_{n-1} - x_0}$?	**nein**
5.	Ist der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f\|x_0,\ldots,x_n)(x) - f(x)\|$ für äquidistante Stützstellen minimal?	**nein**

Verständnisfragenblock 5: Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^{m} \omega_j f(x_j)$, mit $a \le x_0 < \ldots < x_m \le b$.		
1.	Hängen die Gewichte ω_j bei Gauß-Quadraturformeln von der Funktion f ab?	**nein**
2.	Basieren Newton-Cotes-Formeln auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen ?	**ja**
3.	Sei $m = 2$. Hat die Newton-Cotes-Formel dann Gewichte $\omega_0 = 0, \omega_1 = \frac{1}{2}, \omega_2 = 1$?	**nein**
4.	Für Polynome p bis einschließlich zu welchem Grad ist die Gauß-Quadratur $Q_5(p)$ exakt, das heißt $Q_5(p) = I(p)$?	**11**
5.	Ist bei derselben Anzahl an Stützstellen der absolute Fehler bei der Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei der entsprechenden Newton-Cotes-Formel?	**nein**

Aufgabe 1
Der Ausdruck

$$f := (\sqrt{5} - 2)^2$$

kann mittels Binomischer Formeln umgeformt werden zu

$$(\sqrt{5} - 2)^2 = \left(\frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}+2} \right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{5}+2)^2} = \frac{1}{9+4\sqrt{5}} .$$

Welche der Darstellungen $(\sqrt{5} - 2)^2$ und $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$ liefert voraussichtlich das bessere Ergebnis, wenn bei der Auswertung die Näherung $\sqrt{5} \approx 2.2$ verwendet wird? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne f explizit auszuwerten. Schätzen Sie dazu den relativen Fehler ab, der entsteht, wenn man die Näherung $\sqrt{5} \approx 2.2$ benutzt.

7 Punkte

Musterlösung Wir fassen die beiden Darstellungen von f als Auswertungen geeigneter Funktionen

$$g_1(x) := (x-2)^2 , \qquad g_2(x) := \frac{1}{9+4x}$$

an der Stelle $x = \sqrt{5}$ auf. g_1 und g_2 haben die Ableitungen

$$g_1'(x) := 2(x-2) , \qquad g_2'(x) := \frac{-4}{(9+4x)^2} .$$

In erster Näherung gelten nun die Fehlerfortpflanzungsformeln

$$\left| \frac{g_1(x) - g_1(\tilde{x})}{g_1(x)} \right| \doteq \kappa_{g_1}(x) \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| , \qquad \left| \frac{g_2(x) - g_2(\tilde{x})}{g_2(x)} \right| \doteq \kappa_{g_2}(x) \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| ,$$

mit den relativen Konditionszahlen

$$\kappa_{g_1}(x) = \left| \frac{2x}{x-2} \right| , \qquad \kappa_{g_2}(x) = \left| \frac{4x}{9+4x} \right| .$$

Für $x = \sqrt{5}$ und $\tilde{x} = 2.2$ erhalten wir für den relativen Eingabefehler und die Konditionszahlen

$$\left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| = 0.0161301 , \qquad \kappa_{g_1}(\sqrt{5}) = 18.9443 , \qquad \kappa_{g_2}(\sqrt{5}) = 0.498447 ,$$

und damit für den relativen Fehler in g_1 bzw. g_2

$$\left| \frac{g_1(x) - g_1(\tilde{x})}{g_1(x)} \right| \doteq 0.305573 , \qquad \left| \frac{g_2(x) - g_2(\tilde{x})}{g_2(x)} \right| \doteq 0.00804000 .$$

Also können wir sowohl an der Konditionszahl aus auch an den relativen Fehlern von g_1 und g_2 ablesen, dass das bessere Ergebnis mit der Auswertung von g_2 zu erwarten ist.

Aufgabe 2
Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6-\beta & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

mit $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.

b) Bestimmen Sie die Determinante von A in Abhängigkeit von $\beta \in \mathbb{R}$.

c) Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ ist A symmetrisch positiv definit?

d) Es sein nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^Tx = b$. (Berechnung über LR-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

5+2+1+4 = 12 Punkte

Musterlösung

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&d_{11} = a_{11} = 1\,, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = 2\,, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = -1\,, \\
&d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = (6-\beta) - 4 = 2 - \beta\,, \\
&l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{-2-(-1\cdot 1\cdot 2)}{2-\beta} = 0\,, \\
&d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22} = 4 - 1 - 0 = 3\,,
\end{aligned}$$

und damit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A) = \det(LDL^T) &= \underbrace{\det(L)}_{=1}\det(D)\underbrace{\det(L^T)}_{=1} \\
&= \det(D) = 1\cdot(2-\beta)\cdot 3 \\
&= 6 - 3\beta\,.
\end{aligned}$$

c) A ist genau dann positiv definit, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind, also für $\beta < 2$.

d) Wir lösen zunächst $Lz = b$ mit $z := DL^T x$ durch Vorwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & -11 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow z = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $DL^T x = z = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und somit $L^T x = D^{-1} z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =: y$.

Nun lösen wir $L^T x = y$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Lösung des Gleichungssystems lautet also $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3
Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \exp(2y) + \cos(x-1) &= 3 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 &= 3 \end{aligned}$$

mittels einer Iteration des Newton-Verfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6 Punkte

Musterlösung Gesucht ist die Nullstelle der Funktion

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \exp(2y) + \cos(x-1) - 3 \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3 \end{pmatrix}$$

mit Jacobi-Matrix

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x-1) & 2\exp(2y) \\ 2x & y \end{pmatrix}.$$

Für den Startwert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist damit das zu lösende Gleichungssystem für den ersten Schritt des Newton-Verfahrens

$$\left(\, Df(x_0,y_0) \; \middle| \; -f(x_0,y_0) \, \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2\exp(2) & -\exp(2)+2 \\ 2 & 1 & 1.5 \end{array} \right)$$

mit Lösung

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.93233 \\ -0.36466 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich als erste Näherungslösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.93233 \\ 0.63534 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte f_i:

t_i	-1	2	7
f_i	0.4	1.45	2.4

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = b\sqrt{t+a} - \frac{1}{4}a$$

genügen.

a) Zu bestimmen sind die optimalen Parameter a, b im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie das entsprechende <u>nichtlineare</u> Ausgleichsproblem.

b) Für das Gauß-Newton Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 2, b_0 = 1$ gegeben. Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.

c) Führen Sie den ersten Schritt mittels Givens-Rotationen durch. Geben Sie anschließend die 2-Norm des Residuums des nichtlinearen Ausgleichsproblems an.

3+5+9 = 17 Punkte

Musterlösung

a) Das nichtlineare Ausgleichsproblem lautet:
Finde $(a^*, b^*) \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|F(a^*, b^*)\|_2 = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|F(a,b)\|_2$, wobei

$$F(a,b) := \begin{pmatrix} b\sqrt{-1+a} - \frac{1}{4}a - 0.4 \\ b\sqrt{2+a} - \frac{1}{4}a - 1.45 \\ b\sqrt{7+a} - \frac{1}{4}a - 2.4 \end{pmatrix}.$$

b) Das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt des Gauß-Newton Verfahrens lautet:
Finde $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*) \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|DF(a_0,b_0)\mathbf{s}^* + F(a_0,b_0)\|_2 = \min_{\mathbf{s}\in\mathbb{R}^2} \|DF(a_0,b_0)\mathbf{s} + F(a_0,b_0)\|_2$, wobei für die Jacobi-Matrix gilt

$$DF(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{-1+a}} - \frac{1}{4} & \sqrt{-1+a} \\ \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{2+a}} - \frac{1}{4} & \sqrt{2+a} \\ \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{7+a}} - \frac{1}{4} & \sqrt{7+a} \end{pmatrix},$$

und damit für $a_0 = 2, b_0 = 1$

$$DF(a_0,b_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 2 \\ -\frac{1}{12} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(a_0,b_0) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

c) Das zum linearen Ausgleichsproblem gehörige überbestimmte Gleichungssystem lautet

$$\left(\, DF(a_0,b_0) \;\middle|\; -F(a_0,b_0) \,\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.25 & 1 & -0.1 \\ 0 & 2 & -0.05 \\ -0.0833333 & 3 & -0.1 \end{array}\right) =: \left(\, M \;\middle|\; v \,\right).$$

Lösen des linearen Ausgleichsproblems mittels Givens-Rotationen, 1. Schritt:

$$M_{1,1} = 0.25\,, \qquad M_{3,1} = -0.0833333\,,$$
$$r = \sqrt{M_{1,1}^2 + M_{3,1}^2} = 0.263523\,, \qquad c = \frac{M_{1,1}}{r} = 0.948683\,, \quad s = \frac{M_{3,1}}{r} = -0.316228$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.263523 & 0 & -0.0632456 \\ 0 & 2 & -0.05 \\ 0 & 3.16228 & -0.126491 \end{array}\right) =: \left(\begin{array}{c|c} \tilde{M} & \tilde{v} \end{array}\right).$$

2. Schritt:

$$\tilde{M}_{2,2} = 2\,, \qquad \tilde{M}_{3,2} = 3.16228\,,$$
$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{M}_{2,2}^2 + \tilde{M}_{3,2}^2} = 3.74166\,, \qquad \tilde{c} = \frac{\tilde{M}_{2,2}}{\tilde{r}} = 0.534522\,, \quad \tilde{s} = \frac{\tilde{M}_{3,2}}{\tilde{r}} = 0.845154$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.263523 & 0 & -0.0632456 \\ 0 & 3.74166 & -0.133631 \\ 0 & 0 & -0.0253546 \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen ergibt

$$s_2^* = -0.0357143\,, \qquad s_1^* = -0.24$$

und damit

$$\begin{aligned} a_1 &= a_0 + s_1^* = 2 - 0.24 = 1.76 \\ b_1 &= b_0 + s_2^* = 1 - 0.0357143 = 0.964286\,. \end{aligned}$$

Die Norm des Residuums des nichtlinearen Ausgleichsproblems ist

$$\|F(a_1, b_1)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.000644796 \\ -0.0201806 \\ 0.0140251 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.0245840\,.$$

Aufgabe 5
Zur Funktion $f(x) = 2x^2 + 1.8x - 0.72 + 2\cos(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{5}\pi)$ sind folgende Funktionswerte bekannt:

x	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f(x)	0.21826	0	-0.10197	-0.070943	0.11094	0.46197	1	1.7417

Um f an mehreren Stellen im Intervall $[-0.2, 0.22]$ auszuwerten, soll mithilfe der Newtonschen Interpolationsformel ein Interpolationspolynom vom Grad ≤ 2 für f bestimmt werden.

a) Wählen Sie aus obiger Tabelle Stützstellen so aus, dass Sie eine möglichst gute Fehlerschranke für den Interpolationsfehler im Intervall $[-0.2, 0.22]$ bekommen. Begründen Sie Ihre Wahl der Stützstellen.

b) Benutzen Sie die zuvor gewählten Stützstellen, um mithilfe der Newtonschen Interpolationsformel eine Horner-ähnliche Darstellung des Interpolationspolynoms aufzustellen.

c) Wie groß ist der Interpolationsfehler maximal im Intervall $[-0.2, 0.22]$?

2+5+6 = 13 Punkte

Musterlösung

a) Für ein Interpolationspolynom vom Grad ≤ 2 werden 3 Stützstellen $x_0 < x_1 < x_2$ benötigt. Für den Interpolationsfehler gilt dann

$$f(x) - P(f|x_0, x_1, x_2)(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f'''(\xi)}{3!}$$

für ein $\xi \in [\min\{x_0, -0.2\}, \max\{x_2, 0.22\}]$. Um eine möglichst gute Schranke für diesen Interpolationsfehler zu bekommen, wählen wir die Stützstellen so, dass das Maximum des Betrags des Knotenpolynoms $\max_{x\in[-0.2,0.22]} |\omega(x)| = \max_{x\in[-0.2,0.22]} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$ im Intervall $[-0.2, 0.22]$ minimiert wird. Damit erhalten wir die Stützstellen $x_0 = -0.2, x_1 = 0, x_2 = 0.2$.

b) Mit der Newtonschen Interpolationsformel erhalten wir das Tableau der dividierten Differenzen:

-0.2	0		
0	-0.10197	-0.50985	
0.2	-0.070943	0.15514	1.6625

Damit erhalten wir das Interpolationspolynom in Horner-ähnlicher Darstellung

$$P(f \mid -0.2, 0, 0.2)(x) = 0 + (x + 0.2) \cdot (-0.50985 + x \cdot 1.6625)\,.$$

c) Für die Fehlerabschätzung berechnen wir zunächst die Ableitungen von f

$$f'(x) = 4x + 1.8 - \frac{2}{3}\pi\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{5}\pi)\,,$$
$$f''(x) = 4 - \frac{2}{9}\pi^2\cos(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{5}\pi)\,,$$

$$f'''(x) = \frac{2}{27}\pi^3 \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{5}\pi)\,.$$

Für $x \in [-0.2, 0.22]$ ist $\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{5}\pi \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{71}{150}\pi] \subset [0, \frac{1}{2}\pi]$. Da die Sinusfunktion im Intervall $[0, \frac{1}{2}\pi]$ positiv, monoton wachsend und $\sin(\frac{71}{150}\pi) = 0.99452$, ist

$$|f'''(x)| = \left|\frac{2}{27}\pi^3 \sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{5}\pi)\right| \leq \frac{2}{27}\pi^3 \cdot 0.99452 = 2.2842\,.$$

Damit erhalten wir für $x \in [-0.2, 0.22]$ die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - P(x)| \leq |(x+0.2)x(x-0.2)| \underbrace{\max_{\xi \in [-0.2, 0.22]} \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{3!}}_{\leq \frac{2.2842}{6} = 0.38070}$$

Mit $\omega(x) = (x+0.2)x(x-0.2) = x^3 - 0.04x$ erhalten wir $\omega'(x) = 3x^2 - 0.04$ und somit für $w'(x) \overset{!}{=} 0$ die Extremstellen

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{0.04}{3}},$$

also $x_1 = 0.11547 \in [-0.2, 0.22]$ und $x_2 = -0.11547 \in [-0.2, 0.22]$ mit den Funktionswerten

$$\begin{aligned} \omega(x_1) &= -0.0030792, \\ \omega(x_2) &= 0.0030792. \end{aligned}$$

Weiter gilt für die Funktion ω am Rand des Intervalls $[-0.2, 0.22]$

$$\begin{aligned} \omega(-0.2) &= 0, \\ \omega(0.22) &= 0.001848\,. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\max_{x \in [-0.2, 0.22]} |\omega(x)| = 0.0030792\,,$$

also

$$|f(x) - P(x)| \leq 0.0030792 \cdot 0.38070 = 0.0011723.$$