Diplom–VP HM III/IV - Numerik: Aufgabe 1 (lineares GLS)

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die exakte Lösung ist $x = \left(\frac{10000}{10001}, \frac{10002}{10001}\right)^T$.

a) Lösen Sie $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *ohne* Spaltenpivotisierung.

b) Lösen Sie $Ax = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Spaltenpivotisierung.

c) Vergleichen Sie die Lösungen aus a) und b) mit der exakten Lösung, indem Sie die relativen Fehler (in der Maximumnorm) berechnen, und erklären Sie Ihre Beobachtung.

Teil a) Zunächst wird die rechte Seite b an die Matrix A angehängt, und alle Werte werden auf 3 Stellen gerundet. Dann ergibt die Gaußelimination ohne Pivotisierung:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.000100 & -1.00 & -1.00 \\ 1.00 & 1.00 & 2.00 \end{array}\right) \xrightarrow{l_{2,1}=10000} \left(\begin{array}{cc|c} 0.000100 & -1.00 & -1.00 \\ 0 & 10000 & 10000 \end{array}\right)$$

$\boxed{1}$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir die Lösung

$$x_G = (0.00, 1.00)^T.$$

$\boxed{1}$

Teil b) Ausgangspunkt ist die zusammengesetzte Matrix $(A \mid b)$ aus Teil a). Für die Gaußelimination mit Pivotisierung ergibt sich:

$$(A \mid b) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.000100 & -1.00 & -1.00 \end{array}\right) \xrightarrow{l_{2,1}=0.000100} \left(\begin{array}{cc|c} 1.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0 & -1.00 & -1.00 \end{array}\right)$$

$\boxed{1}$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir die Lösung

$$x_{GP} = (1.00, 1.00)^T.$$

$\boxed{1}$

Teil c) Für die Berechnung der relativen Fehler ergibt sich

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \frac{10002}{10001} = 1.000099990, \\ \|x_G - x\|_\infty &= \frac{10000}{10001} = 0.9999000100, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|x_{GP} - x\|_\infty &= \frac{10000}{10001} = 0.0000999900, \\
r_{x_G} = \frac{\|x_G - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &= 0.9998000400 \approx 1, \\
r_{x_{GP}} = \frac{\|x_{GP} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} &= 0.9998000300 \approx 10^{-4}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$

Die Erklärung hierfür ist, daß Gaußelimination ohne Pivotisierung ein instabiler Algorithmus ist, während Gaußelimination mit Pivotisierung einen stabilen Algorithmus darstellt.

$\boxed{1}$

Diplom–VP HM III/IV - Numerik: Aufgabe 2 (nichtlineare Gleichung)

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = e^{-x}\,\sin x + \frac{1}{2}\,(1 - x)$$

hat je eine Nullstelle in den Intervallen $[-0.6, -0.4]$ und $[1.4, 1.6]$, wobei das Argument der Sinusfunktion im Bogenmaß zu nehmen ist.

a) Bestimmen Sie die negative Nullstelle mit dem Bisektionsverfahren bis auf einen *relativen* Fehler von höchstens 15 %.

b) Bestimmen Sie die positive Nullstelle mittels der ersten beiden Schritte des Sekantenverfahrens (d. h. ausgehend von zwei Startwerten x_0 und x_1 soll eine Näherung x_3 berechnet werden).

Teil a) Wir starten mit dem Intervall $I := [-0.6, -0.4]$ und setzen

$$a_0 = -0.6, \qquad b_0 = -0.4$$

mit den Funktionswerten

$$f(a_0) = -0.2288456660 < 0, \qquad f(b_0) = 0.1190560991 \qquad \Longrightarrow \qquad f(a_0)\cdot f(b_0) < 0.$$

Für die Nullstelle x^* und die Näherung $\tilde{x}$ gilt $x^*,\ \tilde{x} \in I$, also

$$\frac{|\tilde{x} - x^*|}{|x^*|} \leq \frac{b_0 - a_0}{\min(|a_0|,\ |b_0|)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5.$$

$\boxed{1}$

Damit ist die geforderte Toleranz von $\varepsilon = 0.15$ nicht erreicht, also müssen wir das Intervall halbieren:

$$x_0 := \frac{a_0 + b_0}{2} = -0.5 \qquad \text{mit} \qquad f(x_0) = -0.040439083 < 0,$$

also

$$f(a_0)\cdot f(x_0) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_1 = x_0 = -0.5, \quad b_1 = b_0 = -0.4.$$

Der relative Fehler ist

$$\frac{|\tilde{x} - x^*|}{|x^*|} \leq \frac{b_1 - a_1}{\min(|a_1|,\ |b_1|)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

$\boxed{1}$

und erreicht somit immer noch nicht die geforderte Genauigkeit. Erneute Halbierung des Intervalls ergibt

$$x_1 := \frac{a_1 + b_1}{2} = -0.45 \qquad \text{mit} \qquad f(x_1) = 0.042838253 > 0,$$

also

$$f(a_1)\cdot f(x_1) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a_2 = a_1 = -0.5, \quad b_2 = x_1 = -0.45$$

Wegen

$$\frac{|\tilde{x} - x^*|}{|x^*|} \leq \frac{b_2 - a_2}{\min(|a_2|,\ |b_2|)} = \frac{0.05}{0.45} = 0.111 < \varepsilon$$

ist die geforderte Genauigkeit erreicht. $\boxed{1}$

Teil b) Für das Sekantenverfahren benötigen wir 2 Startwerte; wir wählen die beiden Endpunkte des Intervalls $I = [1.4, 1.6]$:

$$x_0 = 1.4 \qquad \text{und} \qquad x_1 = 1.6.$$

Mit der Formel

$$x_{n+1} := x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad n \geq 1,$$

für das Sekantenverfahren ergibt sich folgende Tabelle:

n	x_n	$f(x_n)$	
0	1.4000000e+00	4.3008912e-02	
1	1.6000000e+00	-9.8189570e-02	$\boxed{1}$
2	1.4609198e+00	1.6368730e-04	$\boxed{1}$
3	1.4611513e+00	4.5910000e-07	$\boxed{1}$

Diplom–VP HM III/IV - Numerik: Aufgabe 3 (Interpolation)

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-1	0	1	2
f_i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom in der Newton–Form zu den Stützstellen $x_i = 0, 1, 2$.

b) Berechnen Sie das Interpolationspolynom in der Newton–Form zu allen Stützstellen $x_i = -1, 0, 1, 2$.

c) Die den Daten zugrundeliegende Funktion ist $f(x) = \cos(\pi\, x/3)$. Schätzen Sie den Interpolationsfehler des Interpolationspolynoms aus Teil b) an der Stelle $x = -1/4$ ab.

Teil a) + b) Wir berechnen zunächst die dividierten Differenzen zu den Stützstellen $x_i = 0, 1, 2$ und fügen eine weitere Schrägzeile zur Stelle $x_3 = -1$ für Teil b) hinzu:

$$
\begin{array}{r|lllllll}
0 & \boxed{1} & & & & & & \\
 & & > & \boxed{-1/2} & & & & \\
1 & 1/2 & & & > & \boxed{-1/4} & & \\
 & & > & -1 & & & > & \boxed{\boxed{1/12}} \\
2 & -1/2 & & & > & -1/3 & & \\
 & & > & -1/3 & & & & \\
-1 & 1/2 & & & & & &
\end{array}
\qquad \boxed{1+1}
$$

Die eingerahmten Werte benötigen wir für das Polynom 2. Grades in Teil a) und den doppelt eingerahmten Wert zusätzlich für das Polynom 3. Grades in Teil b). Dann ist das Polynom aus Teil a) bestimmt durch

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= 1 \cdot 1 + \frac{-1}{2} \cdot (x-0) + \frac{-1}{4} \cdot (x-0)\,(x-1) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,x\,(x-1) \;=\; \left(-\frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2}\right)\,x + 1,
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$

und in Teil b) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= p_2(x) + \frac{1}{12} \cdot (x-0)\,(x-1)\,(x-2) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,x\,(x-1) + \frac{1}{12} \cdot (x-0)\,(x-1)\,(x-2) \\
&= \left(\left(\frac{1}{12}(x-2) - \frac{1}{4}\right)\,(x-1) - \frac{1}{2}\right)\,x + 1.
\end{aligned}
$$

$\boxed{1}$

Teil c) Die Formel für den Interpolationsfehler lautet

$$\begin{aligned} |f(x) - p_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \dots (x - x_n) \right| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \, |(x - x_0) \dots (x - x_n)|, \end{aligned}$$

wobei $a = \min\{x_0, \dots, x_n, x\}$ und $b = \max\{x_0, \dots, x_n, x\}$. Hier ist $n = 3,\ x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -1$ und $x = -1/4$, also $a = -1,\ b = 2$ und

$$|f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \max_{\xi \in [-1,2]} |f^{(4)}(\xi)| \, |x\,(x-1)\,(x-2)\,(x+1)|$$

Die vierte Ableitung von f ist gegeben

$$f^{(4)}(x) = \frac{\pi^4}{81} \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right),$$

also

$$\max_{\xi \in [-1,2]} |f^{(4)}(\xi)| = f^{(4)}(0) = \frac{\pi^4}{81}.$$

$\boxed{1}$

Das Knotenpolynom $w(x) = x\,(x-1)\,(x-2)\,(x+1)$ hat für $x = -1/4$ den Wert

$$w(-1/4) = \frac{-1}{4} \cdot \frac{-5}{4} \cdot \frac{-9}{4} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{135}{256},$$

so daß wir insgesamt für den Fehler

$$|f(-1/4) - p_3(-1/4)| \leq \frac{1}{24} \cdot \frac{\pi^4}{81} \cdot \frac{135}{256} = \frac{5\pi^4}{18432} = 0.02642390708$$

erhalten. $\boxed{1}$