Aufgabe 10 (Ausgleichsproblem)
Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -1 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 1 & 0 & 2 \end{array}\,.$$

Bestimmen Sie die Parabel $y(t) = at^2 + bt$ so, daß die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{3}(y(t_i)-y_i)^2$ minimal wird. Formulieren Sie dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $||Ax - f||_2 \to$ min, lösen Sie dieses und berechnen Sie das Residuum. Benutzen Sie zur Lösung die Normalgleichungen.

7 Punkte

Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist gegeben durch $\|A\,x - f\|_2 \to$ min mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{1}$

Die Normalgleichungen lauten $A^T Ax = A^T f$ mit

$$A^T A = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A^T f = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$

Gaußselimination ohne Pivotisierung ergibt

$$(A^T A \mid A^T f) = \begin{pmatrix} 18 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 18 & 8 & 9 \\ 0 & \frac{22}{9} & -1 \end{pmatrix},$$

woraus sich durch Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$

ergibt, also

$$y(t) = \frac{1}{22}\,(15\,t^2 - 9\,t).$$

Das Residuum berechnet sich zu

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y(t_i) - f_i)^2} = \|A\,x - f\|_2 = \left\| \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{\sqrt{11}}{11} = 0.3015.$$

$\boxed{2}$

Diplom–VP HM III/IV - Numerik: Aufgabe 11 (Integration)
(siehe auch Skript S. 159)

Aufgabe 11 (Integration)
Für das Integral

$$I = \int_0^2 e^{\sin x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der summierten Simpsonregel, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$ zu erreichen?
Hinweis: Für $f(x) = e^{\sin x}$ gilt $\max_{\xi\in\mathbb{R}}|f^{(4)}(\xi)| = 4\cdot e$ und der Fehler der summierten Simpsonregel läßt sich durch $(b-a = n\cdot h)$

$$\frac{b-a}{2880} h^4 \max_{\xi\in[a,b]}|f^{(4)}(\xi)|$$

abschätzen.

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I, indem Sie $n = 2$ setzen.

7 Punkte

Teil a) Der Fehler der summierten Simpsonregel $S(h)$ muß die Abschätzung

$$|S(h) - I| \le \frac{b-a}{2880} h^4 \max_{\xi\in[a,b]} f^{(4)}(\xi) \le \frac{b-a}{2880} h^4 \max_{\xi\in\mathbb{R}} f^{(4)}(\xi) \overset{!}{\le} \varepsilon.$$

erfüllen. Aufgelöst nach der Schrittweite h ergibt sich

$$h \overset{!}{\le} \sqrt[4]{\frac{2880\,\varepsilon}{(b-a)\ \max_{\xi\in\mathbb{R}} f^{(4)}(\xi)}}.$$

Hier ist $a = 0,\ b = 2,\ \varepsilon = 10^{-2}$ und $M = 4\cdot e = 10.87312731$ gemäß Hinweis, also

$$h \le 1.0727586 \qquad \Longrightarrow \qquad n \ge \left\lceil \frac{b-a}{h} \right\rceil = 2.$$

$\boxed{3}$

Teil b) Die summierte Simpsonregel $S(h)$ zur Schrittweite h und $n\cdot h = b-a$ lautet

$$S(h) = \frac{1}{6}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n} f(a + (i-1/2)\,h) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\,h) + f(b) \right),$$

$\boxed{1}$

also für $n = 2$

$$S(h) = \frac{1}{6}\,(f(a) + 4\,f(a+h/2) + 2\,f(a+h) + 4\,f(a+3\,h/2) + f(b))\,.$$

Wegen $a = 0$, $b = 2$ und $h = (b-a)/n = 1$ erhalten wir

$$S(h) = \frac{1}{6}\,(f(0) + 4\,f(1/2) + 2\,f(1) + 4\,f(3/2) + f(2)) = 4.238106773.$$

$\boxed{3}$

Diplom–VP HM III/IV - Numerik: Aufgabe 12 (L-R-Zerlegung mit Pivotisierung)

Aufgabe 12 (L-R-Zerlegung mit Pivotisierung)
Gegeben ist das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimen Sie f"ur A die L-R-Zerlegung mit Pivotisierung.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der L-R-Zerlegung aus a).

7 Punkte

Teil a) Die L-R-Zerlegung mit Pivotisierung erhalten wir aus dem folgenden Schema, wobei das betragsmäßig größte Element als Pivotelement zu wählen ist:

$$A = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \begin{array}{|ccc|} \hline 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|cc|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 4 \\ \hline 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 4 \\ \hline 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline \end{array}$$

Dann gilt $P\,A = L\,R$ mit

$$P\,A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{4}$

Teil b) Zunächst müssen wir die Zeilenvertauschungen für die rechte Seite durchführen und erhalten

$$P\,b = (5, 10, 7)^T.$$

$\boxed{1}$

Damit is $A\,x = b$ äquivalent zu $L\,y = P\,b$ und anschließendem Lösen von $R\,x = y$. Wir erhalten mit Vorwärts– und Rückwärtseinsetzen

$$\begin{aligned} L\,y = P\,b \quad &\Longrightarrow \quad y = (5, 10, -1/2)^T, \\ R\,x = y \quad &\Longrightarrow \quad x = (1, 2, 1)^T. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$

Diplom–VP HM III/IV - Numerik: Aufgabe 13 (nichtlineare Gleichungen)

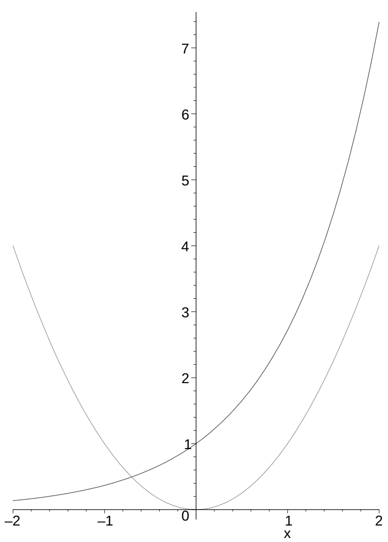
Aufgabe 13 (nichtlineare Gleichungen)
Die Gleichung $e^x = x^2$ besitzt auf $\mathbb{R}$ genau eine Lösung, die approximativ bestimmt werden soll.

a) Verschaffen Sie sich mittels einer geeigneten Skizze eine ganzzahlige Näherung.

b) Verbessern Sie die Näherung aus a) durch zwei Schritte des Newtonverfahrens.

7 Punkte

Teil a) Wir skizzieren e^x und x^2 im Bereich $[-2, 2]$:



Im Intervall $[-1, 0]$ befindet sich die Lösung der nichtlinearen Gleichung. Als Startwert kommt $x_0 = -1$ (oder auch $x_0 = 0$) in Frage. $\boxed{2}$

Teil b) Für das Newtonverfahren muß die Gleichung in ein Nullstellenproblem $f(x) = 0$ umgewandelt werden mit

$$f(x) := e^x - x^2.$$

$\boxed{1}$

Die Ableitung lautet

$$f'(x) = e^x - 2\,x,$$

$\boxed{1}$

somit ist das Newtonverfahren gegeben durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n^2}{e^{x_n} - 2\,x_n}$$

$\boxed{1}$

Zum Startwert $x_0 = -1$ ergibt sich dann folgende Tabelle:

i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
0	-6.3212056e-01	2.3678794e+00	-7.3304361e-01
1	-5.6908448e-02	1.9465317e+00	-7.0380779e-01

$\boxed{2}$

Alternativ erhalten wir für $x_0 = 0$:

i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	x_{i+1}
0	1.0000000e+00	1.0000000e+00	-1.0000000e+00
1	-6.3212056e-01	2.3678794e+00	-7.3304361e-01