Hinweis: Die Numerikaufgaben wurden mit 0.5 Punkten als kleinster Einheit korrigiert. Die Summe der in den vier Aufgaben erzielten Punkte wurde dann auf ganze Zahlen gerundet.

Aufgabe N1 (4.5 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & \beta \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung (ohne Pivotisierung) von A unter der Vorausssetzung, daß sie existiert.

b) Für welche Werte von α und β ist die LR–Zerlegung ohne Pivotisierung durchführbar? Für welche Werte ist **zusätzlich** das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ eindeutig lösbar?

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ für $\alpha = 2$, $\beta = 1$ mit Hilfe der in a) bestimmten LR–Zerlegung.

Teil a)

$$L_{21} = \tfrac{-1}{\alpha} \quad \rightarrow \quad a^1_{22} = \tfrac{1}{\alpha} \quad , \quad a^1_{23} = \tfrac{\alpha+2}{\alpha}$$

$$L_{31} = \tfrac{-2}{\alpha} \quad \rightarrow \quad a^1_{32} = \tfrac{2-\alpha}{\alpha} \quad , \quad a^1_{33} = \beta\tfrac{\alpha+4}{\alpha}$$

$$L_{32} = 2-\alpha \quad \rightarrow \quad a^2_{33} = \beta+\alpha$$

$$A = L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\alpha} & 1 & 0 \\ \frac{-2}{\alpha} & 2-\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & \frac{\alpha+2}{\alpha} \\ 0 & 0 & \beta+\alpha \end{pmatrix}$$

Teil b)

Für $\alpha \neq 0$ ist LR–Zerlegung ohne Pivotisierung durchführbar.
Ist zusätzlich $\alpha \neq -\beta$, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar

Teil c)

$$A = L \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot y = b \rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad R \cdot x = y \rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe N2 (4.5 Punkte)

Gegeben sind die vier Meßwerte

t_i	-2	-1	1	2
y_i	2	0	1	4

, die der Theorie nach zu einer Funktion der Form $y(t) = \alpha\, t^2 + \beta\, t$ gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Lösen Sie obiges Ausgleichsproblem ausnahmsweise mittels der Normalgleichungen und geben Sie α und β sowie das Residuum explizit an.

Teil a)

Für das lineare Ausgleichsmodell $\|A \cdot x - b\|_2 \to \min$ erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Teil b)

Daraus erhalten wir die Normalgleichungen ($A^T A \cdot x = A^T b$):

$$\begin{pmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 25 \\ 5 \end{pmatrix};$$

und somit $\alpha = 25/34$ sowie $\beta = 1/2 \to y(t) = 25/34 \cdot t^2 + t/2$. Das Residuum ist

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{4} (y(t_i) - y_i)^2} = \frac{1}{17}\sqrt{34} = 0.3430$$

Aufgabe N3 (4.5 Punkte)

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $e^{-x} = \frac{1}{2}(x-1)^2,\ x \in \mathbb{R}$.

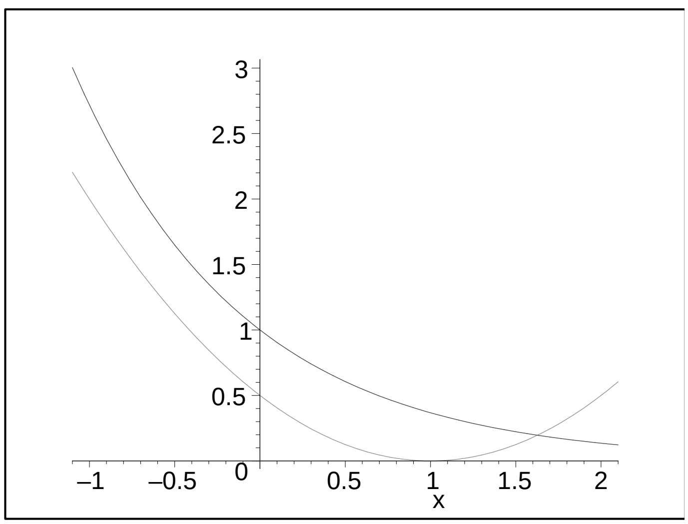
a) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Seiten der Gleichung und geben Sie ein **ganzzahliges** Intervall I an, in dem die (eindeutige) Lösung liegt.

b) Führen Sie zwei Schritte mit dem Newtonverfahren aus, wobei Sie als Startwert den Mittelpunkt des in a) bestimmten Intervalls I nehmen sollen.

c) Führen Sie zwei Schritte mit dem Sekantenverfahren aus, wobei Sie als Startwerte die Randwerte des in a) bestimmten Intervalls I nehmen sollen.

d) Welches sind die Vorteile des Sekantenverfahrens gegenüber dem Newtonverfahren?

Teil a)



Teil b)

Offensichtlich ist $[1,2]$ ein geeignetes Intervall. Wir erhalten

$$f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}(x-1)^2 \rightarrow f'(x) = -e^{-x} - (x-1) = -e^{-x} - x + 1.$$

Zum Startwert $x_0 = 1.5$ erhalten wir $x_1 = 1.635702$ und $x_2 = 1.626981$.

Teil c)

Beim Sekantenverfahren brauchen wir zwei Startwerte : $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$. Mit den Abkürzungen $f_i = f(x_i)$ und $m_i = (f_i - f_{i-1})/(x_i - x_{i-1})$ lautet die Iterationsvorschrift $x_{i+1} = x_i + f_i/m_i$. Dies ergibt die folgende Iteration:

$$\begin{aligned} m_1 &= -0.7325542 \quad , \quad x_2 = 1.502194 \\ m_2 &= -0.9264784 \quad , \quad x_3 = 1.606397 \end{aligned}$$

Teil d)

Beim Sekantenverfahren braucht man keine Ableitung zu berechnen.

Aufgabe N4 (4.5 Punkte)

Gegeben sei folgende Wertetabelle der Funktion $f(x) = \tan(x)$:

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.5
$f(x)$	0.0	0.25534	0.54630	0.93160	1.5574	3.0096	14.101

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.2)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 3. Wählen Sie dazu die Stützstellen geeignet aus.
Hinweis: Nutzen Sie aus, daß f punktsymmetrisch im Ursprung ist.

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den Näherungswert an.
Hinweis: Es gilt

$$f'(x) = 1 + \tan(x)^2, \; f''(x) = 2\tan(x)\left(1+\tan(x)^2\right), \; f'''(x) = 2\left(1+\tan(x)^2\right)\left(1+3\tan(x)^2\right),$$

$$f^{(4)}(x) = 8\tan(x)\left(1+\tan(x)^2\right)\left(2+3\tan(x)^2\right), \; f^{(5)}(x) = 8\left(1+\tan(x)^2\right)\left(2+15\tan(x)^2+15\tan(x)^4\right),$$

$$f^{(6)}(x) = 16\tan(x)\left(1+\tan(x)^2\right)\left(17+60\tan(x)^2+45\tan(x)^4\right).$$

Teil a)

Gemäß Hinweis gilt $f(-x) = -f(x)$. Da eine Näherung für $\bar{x} = 0.2$ gesucht ist, wird der das Knotenpolynom betreffende Anteil durch die Wahl $x_0 = -0.25$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.25$, $x_3 = 0.5$ minimiert. Für das Newton–Schema der dividierten Differenzen ergibt sich:

$$\begin{array}{l|lllllll}
x_0 = -0.25 & \text{-0.255340} & & & & & & \\
 & & > & 1.021360 & & & & \\
x_1 = 0 & 0.00000 & & & > & 0.000000 & & \\
 & & > & 1.021360 & & & > & 0.379947 \\
x_2 = 0.25 & 0.255340 & & & > & 0.284960 & & \\
 & & > & 1.163840 & & & & \\
x_3 = 0.5 & 0.546300 & & & & & &
\end{array}$$

Die Newton–Darstellung des Interpolationspolynoms lautet in der hornerartigen Form

$$p_3(x) = -0.255340 + (x+0.25)\cdot\{1.021360 + (x-0)\cdot[0.0 + (x-0.25)\cdot 0.379947]\}.$$

Ausgewertet an der Stelle $\bar{x} = 0.2$ ergibt sich der auf 6 Stellen gerundete Wert $p_3(\bar{x}) = 0.202562$.

Teil b)

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir die 4. Ableitung von f:

$$f^{(4)}(x) = 8\tan(x)\left(1+\tan(x)^2\right)\left(2+3\tan(x)^2\right).$$

Offensichtlich (tan monoton steigend, nur positive Koeffizienten) ist diese Ableitung positiv und nimmt ihr Maximum am rechten Rand an: $M_4 = f^{(4)}(0.5) = 16.43$. Für das Knotenpolynom ergibt sich

$$\omega_0 = |(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)(\bar{x}-x_3)| = |(0.2+0.25)(0.2-0.0)(0.2-0.25)(0.2-0.5)| = 0.00135,$$

und somit

$$|f(0.2) - p_3(0.2)| \leq \frac{1}{4!}\cdot M_4 \cdot \omega_0 = 0.924\cdot 10^{-3}.$$