Aufgabe 10:

a) 2 Givens-Rotationen:

1. $r = 2; c = s = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{array}$$

2. $r = \sqrt{3}; c = \frac{1}{3}\sqrt{6}; s = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{array}$$

$\Rightarrow\ x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{2};\ x_3 = \sqrt{2}$

b): Da Q orthogonal und R eine Diagonalmatrix ist, gilt

$$\kappa_2(A) = \kappa_2(QR) = \kappa_2(R) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \sqrt{6}.$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A)\frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2} \leq \sqrt{6}\frac{10^{-3}}{\sqrt{20}} = 0.5477\ldots \cdot 10^{-3}.$$

Aufgabe 11:
a)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) - y^2 \\ \sin(x+y) - e^y \end{pmatrix}$$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) & -2y \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) - e^y \end{pmatrix}$$

$$F'(0,-\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} - e^{-\pi/4} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1.571 \\ 0.7071 & 0.2512 \end{pmatrix}$$

Schritt 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.571 \\ 0.7071 & 0.2512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3831 \\ -1.163 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -0.7854 - 0.2439 = -1.029 \\ x_1 = 0 - (-1.731) \quad = \quad 1.731 \end{cases}$$

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1.571 \\ 0.7071 & 0.2512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.218 \\ 0.2884 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_2 = -1.029 - (-0.7753) = -0.2537 \\ x_2 = 1.731 - 0.6833 \quad = \quad 1.048 \end{cases}$$

b) Das vereinfachte Newton-Verfahren erfordert pro Iteration weniger Arbeitsaufwand als das unmodifizierte Verfahren, da die Jacobi-Matrix nur einmal aufgestellt und LR- oder QR-zerlegt werden muß. Dafür konvergiert das vereinfachte Verfahren im allgemeinen nur linear und nicht lokal quadratisch.

Aufgabe 12:

a)

$$\sum_{i=1}^{3} |f(x_i) - g(x_i)|^2 = \sum_{i=1}^{3} |a\cos(x_i) - bx_i^3 - x_i|^2 \to \min_{a,b}$$

ist äquivalent zu $\|Ay - c\| \to \min_y$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{\pi^3}{64} \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{\pi^3}{64} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} \\ 0 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}.$$

b)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{\pi^6}{2048} \end{pmatrix}, \quad A^T c = (\, 0, -\tfrac{\pi^4}{128}\,)$$

Optimale Parameterwerte:

$$a = 0;\ b = -\frac{16}{\pi^2}$$

c)

1. Man führt eine QR-Zerlegung von A durch und löst den oberen Block von $Rx = Q^T b$ über Rückwärtseinsetzen.

2. Da die euklidische Norm invariant unter **orthogonalen** Abbildungen ist, gilt
$$\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Q^T b\|_2.$$

3. Die Normalgleichung hat die Kondition $\kappa_2(A)^2$, was im allgemeinen deutlich größer als die Kondition $\kappa_2(A)/\cos(\theta)$ des linearen Ausgleichsproblems ist.

Aufgabe 13:
a) Schema der dividierten Differenzen:

0.2	0.1774			
0.4	0.3000	0.6130		
0.6	0.3552	0.2760	−0.8425	
0.8	0.3377	−0.08750	−0.9088	−0.1105

$$\begin{aligned} P(0.2, 0.4, 0.6, 0.8|f)(x) &= 0.1774 + 0.6130(x-0.2) \\ &\quad -0.8425(x-0.2)(x-0.4) \\ &\quad -0.1105(x-0.2)(x-0.4)(x-0.6) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2xe^{-x^2} - 1 \\ f^{(3)}(x) &= (4x^2-2)e^{-x^2} = 0 \iff x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Entweder nimmt $|f''|$ sein Maximum über $[0,1]$ am kritischen Punkt $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder am Rand an.

$$\begin{aligned} \max_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)| &= \max\{|f''(0)|, |f''(\frac{\sqrt{2}}{2})|, |f''(1)|\} \\ &= \max\{1, |-\sqrt{2}e^{-1/2} - 1| = 1.8577\ldots, |-\frac{2}{e} - 1| = 1.7357\ldots\} \\ &= \sqrt{2}e^{-1/2} + 1 \end{aligned}$$

$|\omega(x)| = |(x-x_i)(x-x_{i+1})|$ hat über $[x_i, x_{i+1}]$ offensichtlich das Maximum 0.01, $i = 0, 1, \ldots, 4$. Insgesamt

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - I(x)| \leq 0.01 \frac{\max_{x\in[0,1]} |f''(x)|}{2} = 0.92888\ldots \cdot 10^{-2}.$$