Verständnisfragen-Teil (36 Punkte)

Jeder der 4 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 9 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 7 Punkte; für 8 richtige 5, für 7 richtige 3 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. **Rechenwege werden nicht gewertet.**

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Die Anzahl der Maschinenzahlen in $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ hängt von $R - r$ ab.	wahr
2.	Die Zahl 19 ist in $\mathbb{M}(4, 2, -5, 7)$ exakt darstellbar.	falsch
3.	In $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 10^{-8}$.	falsch
4.	Die Addition zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer gut konditioniert.	wahr
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 22 in $\mathbb{M}(4, 8, -8, 8)$ an.	**112**
6.	Es gilt $\left\lvert \frac{\text{fl}(x)-x}{x} \right\rvert \leq$ eps für alle $x \in \mathbb{D}$.	wahr
7.	Die Kondition eines Problems ist unabhängig vom Lösungsweg, bzw. Algorithmus.	wahr
8.	Je besser die Kondition eines Problems desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	falsch
9.	Die Funktion $f(x) = x \ln x$ ist schlecht konditioniert für alle x mit $\lvert x\rvert \approx 1$.	wahr
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x)$ der Funktion $f(x) = x^3 \ln(x)$ für $x \to \infty$.	**3**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Für $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des gestörten Problems $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$. Dann gilt $\\|\tilde{x} - x\\|/\\|x\\| \leq \\|A\\|\\|\tilde{b} - b\\|/\\|b\\|$.	falsch
2.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A) \geq 1$.	wahr
3.	Es sei $B := D_z\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_\infty(B) \leq \kappa_\infty(DA)$ für jede reguläre Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Hierbei ist $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich $\\| \cdot \\|_\infty$.	wahr
4.	Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Dann gilt $\det Q = 1$.	falsch
5.	Berechnen Sie $\\|A\\|_1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.	**11**
6.	Es existiert eine normierte untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = L\,R$.	falsch
7.	Pivotisierung verbessert die Kondition des Gleichungssystems $Ax = b$.	falsch
8.	Der Aufwand zur Bestimmung der LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen (gem. Vorl./Buch).	wahr
9.	Die QR-Zerlegung existiert auch für nicht-quadratische Matrizen	wahr
10.	Berechnen Sie $\kappa_2(A)$ der Matrix $= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.	**3**

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $\text{Rang}(A) = n$ (wenn nicht anders erwähnt), $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, obere Dreiecksmatrizen so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix}\tilde{R}\\ \emptyset\end{pmatrix}$ gilt. Zudem sei $x^* = \text{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ die eindeutige Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichproblems. Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten ebenfalls das zugehörige (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(\hat{x})\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

1.	Im Falle $\text{Rang}(A) < n$ ist die Zerlegung $QA = R$ nicht über Householder-Transformationen durchführbar.	falsch
2.	Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $A^T\,(A\,y - b) = 0$. Dann folgt $y = x^*$.	wahr
3.	Es sei $Qb =: \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n,\ b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $\|A\,x - b\|_2^2 = \|\tilde{R}\,x - b_1\|_2^2 + \|b_2\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	wahr
4.	Die Kondition des Minimierungsproblems $x^* = \text{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ hängt nicht von b ab.	falsch
5.	Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Qb = \begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 2\\ -2\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2^2$.	**8**
6.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton Methode ist immer maximal 1.	falsch
7.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein lineares Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$, mit einer Matrix A, die vollen Spaltenrang hat.	wahr
8.	Die Gauß-Newton Methode ist in einer hinreichend kleinen Umgebung der Lösung immer konvergent.	falsch
9.	Die Gauß-Newton Methode kann man als Fixpunktiteration darstellen.	wahr
10.	Bestimmen Sie $\frac{\|A^T A x^*\|}{\|A^T b\|}$ für $b \neq 0$.	**1**

VF-4: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \ldots, x_n) \in \Pi_n$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ interpoliert. Weiter sei $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + [x_0, \ldots, x_n]\, f\, \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	falsch
2.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\rvert$ ist minimal, wenn die Stützstellen äquidistant sind.	falsch
3.	Es gilt $Q(x) = P(Q \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ für alle $Q \in \Pi_n$.	wahr
4.	Es sei $n = 4$. Dann gilt $P(f \mid x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)(x) = P(f \mid x_3, x_1, x_2, x_4, x_1)(x)$ für alle x.	falsch
5.	Es seien $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $f(x_0) = 2$ und $f(x_1) = 1$. Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1)(0)$.	**3**

Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \le x_0 < \ldots < x_m \le b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

6.	Bei der Gauß-Quadratur sind die Gewichte w_j stets nichtnegativ.	wahr
7.	Bei den Newton-Cotes Formeln hängen die Gewichte w_j von den Intervallgrenzen a und b ab.	falsch
8.	Es sei $I_1(f)$ die Trapezregel. Es gilt $\lvert I_1^n(f) - I(f)\rvert \le ch^2$, wobei die Konstante c nicht von n abhängt.	wahr
9.	Es sei I_m die Newton-Cotes Formel. Dann gilt $I_m^n(f) = I(f)$ für alle $f \in \Pi_m$.	wahr
10.	Berechnen Sie die Approximation von $\int_0^2 x^3\, dx$ mit der Simpsonregel.	**4**

Aufgabe 1 (2+2+1+1+2 = 8 Punkte)

Es sei $\alpha \neq 1$ eine Konstante, sowie

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 6 \\ 3 & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von A, d.h. $PA(\alpha) = L(\alpha)R(\alpha)$.

1a) Geben Sie den Wert $\sum_{i,j} |(L(\alpha))_{ij}|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i,j} \|(L(\alpha))_{ij}\|$	4	4.5	2α	121	128	7	-4	30	102	48

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 6 \\ 3 & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot(2,1,3)}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \alpha-1 & -2+\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot(2,3,1)}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & \alpha-1 & -2+\alpha \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & \alpha-1 & -2+\alpha \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

also

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R(\alpha) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 0 & \alpha-1 & -2+\alpha \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\sum_{i,j} |(L(\alpha))_{ij}| = 4,$$

$$\max_{\alpha\in[-1,0]} |\det(R(\alpha))| = \max_{\alpha\in[-1,0]} 6 \cdot |\alpha - 1| \cdot 2 = 24,$$

$$\sum_i |P_{ii}| = 0.$$

1b) Geben Sie den Wert $\max_{\alpha\in[-1,0]} |\det(R(\alpha))|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\max_{\alpha\in[-1,0]} \|\det(R(\alpha))\|$	24	60	14	2	9	36	7	13	1.5	32

1c) Geben Sie den Wert $\sum_i |P_{ii}|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_i \|P_{ii}\|$	0	1	4.5	3	2	4	3.5	2.5	1.5	0.5

Gesucht ist das Polynom zweiten Grades

$$p(x) = a + bx + cx^2 \qquad \text{mit} \qquad p(20) = 100, \quad p(21) = 0, \quad p(22) = -102.$$

In der klassischen Monombasis führt dies auf das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 20 & 400 \\ 1 & 21 & 441 \\ 1 & 22 & 484 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ -102 \end{pmatrix}}_{=:z}.$$

Hinweis: Es gilt

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 231 & -440 & 210 \\ -21.5 & 42 & -20.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1d) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_\infty(B)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\kappa_\infty(B)$	446667	534751	1535178	1492157	39277	13589241	531645	46484763	3480241	2498731

Es gilt

$$\kappa_\infty(B) = \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty = (1 + 22 + 484)(231 + 440 + 210) = 507 \cdot 881 = 446667$$

1e) Eine Approximation der Kondition hat $\kappa_\infty(B) = 1224000$ ergeben. Verwenden Sie diese Approximation für die folgende Aufgabe: Angenommen, die rechte Seite z ist mit einem absoluten Fehler von 0.5 in der ∞-Norm behaftet. Schätzen Sie den relativen Fehler $r_{(a,b,c)}$in den Koeffizienten $(a, b, c)^T$ in der ∞-Norm ab.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$r_{(a,b,c)}$	6000	6200	4200	5300	8400	9000	9600	8100	4800	9200

Wir erhalten

$$\begin{aligned} r_{(a,b,c)} = \frac{\|\delta(a,b,c)^T\|_\infty}{\|(a,b,c)^T\|_\infty} &\leq \kappa_\infty(B) \cdot \frac{0.5}{\|(100, 0, -102)^T\|_\infty} \\ &= 1224000 \cdot \frac{1}{204} \\ &= 6000 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (3+2+1+1 = 7 Punkte)

Die Funktion

$$y(t) := \alpha(-10\,t^2 + 14) + \beta(12\,t^2 - 19\,t) - 12$$

soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0	1	2
y_i	-10	-12	14

Bestimmen Sie die Parameter α und β optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate:

2a) Bestimmen Sie zu dem entsprechenden linearen Ausgleichsproblem $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ die Matrix $A = (A_{ij})$ und den Vektor $b = (b_i)$. Geben Sie $\sum_{i,j} |A_{ij}| + \sum_i |b_i|$an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i,j} \|A_{ij}\| + \sum_i \|b_i\|$	89	23	32	39	34	98	122	134	45	79

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 4 & -7 \\ -26 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad \to \quad \sum_{i,j} |A_{ij}| + \sum_i |b_i| = 61 + 28 = 89$$

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems mit Hilfe von einer Householder-Transformation wird $(B|c)$ in $(B^{(1)}|c^{(1)})$ überführt.

2b) Berechnen Sie $(B^{(1)}|c^{(1)})$ und geben Sie $s^{(1)} = \sum_{i,j} B^{(1)}_{ij} + \sum_i c^{(1)}_i$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$s^{(1)}$	16	11	8.5	-11.5	22	1	-2	8	15	-19

$$\begin{array}{ccc||c|c||l}
 & & & 4 & -6 & \\
 & & & 0 & 12 & \\
 & & & 3 & 3 & \alpha_1 = 5 \\
\hline
9 & 0 & 3 & (45) & -45 & \beta_1 = \frac{1}{45} \\
\hline
 & & \frac{1}{5} & -5 & 3 & -0.6 \\
 & & 0 & 0 & 12 & \\
 & & \frac{1}{15} & 0 & 6 & res = 13.416 \\
\hline
\end{array}$$

Man findet also $x^* = 3/-5 = -0.6$ und es gilt $s^{(1)} = -5 + 21 = 16$.

2c) Geben Sie die Lösung x^* an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x^*	-0.6	-0.3	1.3	3.6	0.9	-4.6	-0.14	0.5	-1.2	-7.4

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Cx - d\|_2$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2d) Geben Sie die Norm des Residuums, d.h. $\|Cx^* - d\|_2$, an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|Cx^* - d\|_2$	5	$\sqrt{29}$	$\sqrt{65}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{47}$	29	25	42	$\sqrt{32}$	26

Das Residuum ist durch $\|Cx^* - d\|_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ gegeben.

Aufgabe 3 (2+2+2+3+1+2 = 12 Punkte)

Gegeben sei die Fixpunktgleichung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\sin\left(\frac{x}{4}\right)\,\cos\left(\frac{y}{2}\right) + 0.2 \\ \frac{1}{2}\,e^{-x^2}\,\sin\left(\frac{y}{2}\right) - 0.1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Für $D = [-1,1]^2$ gilt $F(D) \subset \tilde{D} = I_x \times I_y = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$. Bestimmen Sie ein möglichst kleines $\tilde{D}$. Benutzen Sie dazu keine Ableitungen, sondern schätzen Sie die einzelnen Terme (Faktoren, Summanden), die nur von x bzw. y abhängen, nach oben und unten ab.

3a) Geben Sie $dx = x_1 - x_0$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
dx	0.98962	0.99538	1.1667	2.667	3.1667	4.667	5.1667	1.667	2.1667	3.667

3b) Geben Sie $dy = y_1 - y_0$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
dy	0.47946	0.31962	1.1667	2.667	3.1667	4.667	5.1667	1.667	2.1667	3.667

Es müssen also alle einzelnen Komponenten nach oben und unten abgeschätzt werden.

$$x \in [-1,1] \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{4}\right) \in [-\sin(0.25), \sin(0.25)],\; e^{-x^2} \in [e^{-1}, 1]$$

$$y \in [-1,1] \Rightarrow \cos\left(\frac{y}{2}\right) \in [\cos(0.5), 1],\; \sin\left(\frac{y}{2}\right) \in [-\sin(0.5), \sin(0.5)]$$

Und somit (für D, wir benutzen wieder $\sin(-x) = -\sin(x)$)

$$F_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in [-2\,\sin(0,25)\cdot 1 + 0.2, 2\,\sin(0,25)\cdot 1 + 0.2]$$

$$F_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \left[-\frac{1}{2}\,\sin(0,5) - 0.1, \frac{1}{2}\,\sin(0,5) - 0.1\right]$$

und damit

$$x_1 - x_0 = 4\,\sin(0.25) = 0.98962$$

$$y_1 - y_0 = \sin(0.5) = 0.47946$$

3c) Berechnen Sie $F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sowie $J = F'\begin{pmatrix} 0.5 \\ \pi \end{pmatrix}$ und geben Sie $\|J\|_\infty$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|J\|_\infty$	0.3894	0.2596	1.1667	2.667	3.1667	4.667	51667	1.667	2.1667	3.667

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\sin\left(\frac{x}{4}\right)\,\cos\left(\frac{y}{2}\right) + 0.2 \\ \frac{1}{2}\,e^{-x^2}\,\sin\left(\frac{y}{2}\right) - 0.1 \end{pmatrix} \to F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{x}{4}\right)\,\cos\left(\frac{y}{2}\right) & -\sin\left(\frac{x}{4}\right)\,\sin\left(\frac{y}{2}\right) \\ -x\,e^{-x^2}\,\sin\left(\frac{y}{2}\right) & \frac{1}{4}\,e^{-x^2}\,\cos\left(\frac{y}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$F'\begin{pmatrix} 0.5 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\left(\frac{1}{8}\right) \\ -\frac{1}{2}\,e^{-0.25} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.12467 \\ -0.38940 & 0 \end{pmatrix} \to \left\| F'\begin{pmatrix} 0.5 \\ \pi \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.3894$$

Es sei ab jetzt

$$\tilde{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,\sin\left(\frac{x}{6}\right)\,\cos\left(\frac{y}{2}\right) - 0.2 \\ \frac{1}{3}\,e^{-x^2}\,\sin\left(\frac{y}{2}\right) + 0.2 \end{pmatrix} \to \tilde{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\cos\left(\frac{x}{6}\right)\,\cos\left(\frac{y}{2}\right) & -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{x}{6}\right)\,\sin\left(\frac{y}{2}\right) \\ -\frac{2}{3}\,x\,e^{-x^2}\,\sin\left(\frac{y}{2}\right) & \frac{1}{6}\,e^{-x^2}\,\cos\left(\frac{y}{2}\right) \end{pmatrix}$$

eine Fixpunktfunktion, die ebenfalls D in sich abbildet.

3d) Bestimmen Sie für $\tilde{F}$ eine möglichst kleine Kontraktionszahl L_1 für die 1-Norm. Benutzen Sie dazu wieder keine Ableitungen, sondern schätzen Sie die einzelnen Terme (Faktoren, Summanden), die nur von x bzw. y abhängen, nach oben ab. Geben Sie L_1 an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L_1	0.81962	0.97943	0.16667	0.46667	0.022745	0.0875	0.18372	0.099999	0.22731	0.19483

Auf D gilt (ohne Ableitungen müssen wir $|x| \leq 1$ und $\left|e^{-x^2}\right| \leq 1$ verwenden!):

$$\left|\tilde{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|_{.} \leq . \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\sin\left(\frac{1}{6}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{2}{3}\cdot 1 \cdot 1\sin\left(\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.119302 \\ 0.319617 & 0.166667 \end{pmatrix} \to \left\|\tilde{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_1 \leq 0.819617$$

Wir benutzen ab jetzt $\tilde{L}_1 = 0.65$.

3e) Bestimmen Sie zum Startwert $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ die erste Iterierte $\mathbf{x}_1$ des Fixpunktverfahrens und geben Sie $\|\mathbf{x}_1\|_1$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\mathbf{x}_1\|_1$	0.4	0.3	4.16667	2.6667	3.1667	4.6667	5.6667	1.6667	2.1667	3.6667

Man sieht leicht $\mathbf{x}_1 = \tilde{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}$. Somit ist $\|\mathbf{x}_1\|_1 = 0.4$.

3f) Wieviele Iterationen n sind, für den Startwert aus d) mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um bezüglich der 1-Norm eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.001$ zu erreichen? Geben Sie einen möglichst kleinen Wert für n an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
n	17	25	15	18	23	19	21	27	33	49

Die a-priori Abschätzung ergibt

$$(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|_1 \leq)\ \frac{L^n}{1-L}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1 \overset{!}{\leq} \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon\,(1-L)}{\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0\|_1}\right)}{\ln(L)} = \frac{\ln\left(\frac{0.001\,(1-0.65)}{0.4}\right)}{\ln(0.65)} = 16.3\ldots\ .$$

Aufgabe 4 (1+1+1+2+2+1 = 8 Punkte)

Für die Funktion f ist folgende Wertetabelle mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben.

x	1	3	α	7	12
$f(x)$	β	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{4}$

Zusätzlich ist das folgende Tableau der dividierten Differenzen mit $\gamma \in \mathbb{R}$ zur Bestimmung des Interpolationspolynoms 4. Grades bekannt.

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+2}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+3}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+4}]f$
1	β				
3	0	$\frac{1}{3}$			
α	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$		
7	$\frac{4}{21}$	$\frac{1}{35}$	$-\frac{1}{105}$	$\frac{1}{105}$	
12	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{84}$	$-\frac{1}{420}$	$\frac{1}{1260}$	γ

4a) Bestimmen Sie α. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
α	5	4	6	3.5	4.5	5.5	6.5	4.3	5.3	5.7

Es gilt:

$$\frac{1}{15} = \frac{\frac{2}{15} - 0}{\alpha - 3} \Rightarrow (\alpha - 3)\frac{1}{15} = \frac{2}{15} \Rightarrow \alpha = 5.$$

4b) Bestimmen Sie β. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
β	$-\frac{2}{3}$	-1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

Es gilt:

$$\frac{1}{3} = \frac{0 - \beta}{3 - 1} = -\frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{2}{3}.$$

4c) Bestimmen Sie γ. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
γ	$-\frac{1}{1260}$	$-\frac{1}{672}$	$\frac{1}{1260}$	$\frac{1}{672}$	$\frac{1}{350}$	$-\frac{1}{350}$	$\frac{1}{1355}$	$-\frac{1}{1355}$	$\frac{1}{820}$	$-\frac{1}{820}$

Es gilt:

$$\gamma = \frac{\frac{1}{1260} - \frac{1}{105}}{12 - 1} = -\frac{1}{1260}.$$

Die Wahl von anderen Stützstellen ergab das folgende Tableau der dividierten Differenzen:

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+2}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+3}]f$	$[x_i, \dots, x_{i+4}]f$
2	$-\frac{1}{6}$				
3	0	$\frac{1}{6}$			
4.5	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$		
7	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{189}$	$\frac{1}{189}$	
12	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{84}$	$-\frac{1}{378}$	$\frac{1}{1134}$	$-\frac{1}{2268}$

Rechnen Sie von nun an in der gesamten weiteren Aufgabe mit diesen Werten (nicht mit den von Ihnen berechneten). Wir bezeichnen das Polynom 2. Grades, welches die Funktion f an den Stützstellen $x_0 = 2, x_1 = 3$ und $x_2 = 4.5$ interpoliert mit $P_2 = P(f|x_0, x_1, x_2)$.

4d) Bestimmen Sie $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und geben Sie die Summe der Koeffizienten $\sum_{i=0}^{2} a_i$ an. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i=0}^{2} a_i$	$-\frac{11}{27}$	$-\frac{11}{18}$	0.65	$-\frac{7}{20}$	0.72	$-\frac{2}{5}$	0.94	-0.6	$\frac{11}{100}$	-1.45

Es gilt

$$P_2(x) = -\frac{1}{6} + (x-2)\frac{1}{6} + (x-2)(x-3)\left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{13}{18} + \frac{19}{54}x - \frac{1}{27}x^2.$$

Also lautet der gesuchte Wert: $-\frac{13}{18} + \frac{19}{54} - \frac{1}{27} = -\frac{11}{27}$.

Wir nutzen das Tableau aus Aufgabenteil d) und schätzen den maximalen Fehler der Interpolation durch das Interpolationspolynom 2. Grades ab. Wir sind interessiert an einer Abschätzung für $\max_{x \in [x_0, x_2]} |f(x) - P_2(x)|$.

4e) Bestimmen Sie das für die Fehlerschätzung benötigte Knotenpolynom $\omega(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$, $k \in \mathbb{N}$ und geben Sie die Summe der Koeffizienten $\sum_{i=0}^{k} b_i$ an. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i=0}^{k} b_i$	-7	7310.25	1.5	3.45	5.8	1460.5	1850	2377.8	3507.1	3733.3

Es gilt

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (x-2)(x-3)(x-4.5) = x^3 - 9.5x^2 + 28.5x - 27.$$

Also lautet das gesuchte Ergebnis: $1 - 9.5 + 28.5 - 27 = -7$.

4f) Geben Sie mittels numerischer Differentation und dem Tableau der dividierten Differenzen aus Aufgabenteil d) eine Approximation $D^{(4)}$ für $f^{(4)}(x)$ für $x \in [x_0, \dots, x_4]$ an. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$D^{(4)}$	$-\frac{2}{189}$	$-\frac{1}{63}$	$-\frac{1}{1512}$	$-\frac{1}{2268}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$

Laut Vorlesung gilt

$$f^{(4)}(x) \approx P(f|x_0, \dots, x_4)^{(4)}(x) = 4![x_0, \dots, x_4]f = -\frac{4!}{2268} = -\frac{2}{189}.$$

Aufgabe 5 (3+1+3+2=9 Punkte)

Wir nutzen die Quadraturformel $Q(f) = \frac{1}{2}c_0 f(0) + \frac{1}{3}c_1 f(x_1)$ zur Approximation des Integrals $\int_0^1 f(x)dx$.

5a) Bestimmen Sie (c_1, x_1), sodass die Quadraturformel für alle Polynome der Form $P(x) = ax^2 + bx$ exakt ist. Rechnen Sie exakt.

Sie müssen in dieser Teilaufgabe nicht c_0 bestimmen und die Quadraturformel nicht auf konstante Polynome anwenden.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
(c_1, x_1)	$(\frac{9}{4}, \frac{2}{3})$	$(\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$	$(\frac{9}{4}, \frac{1}{3})$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{3})$	$(\frac{5}{2}, \frac{2}{3})$	$(\frac{9}{4}, \frac{1}{3})$	$(\frac{3}{2}, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$	$(1, \frac{2}{3})$

Für Exaktheit bei Polynomen ersten Grades muss gelten:

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 x\ dx = \frac{1}{3}c_1 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2c_1}.$$

Für Exaktheit bei Polynomen zweiten Grades muss gelten:

$$\frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}c_1 x_1^2 = \frac{1}{3}c_1\left(\frac{3}{2c_1}\right)^2 = \frac{3}{4c_1} \Rightarrow c_1 = \frac{9}{4}.$$

Damit folgt

$$x_1 = \frac{3}{2\cdot\frac{9}{4}} = \frac{2}{3}.$$

5b) Eine andere Rechnung ergab die Werte $c_1 = \frac{7}{5}$ und $x_1 = 0.65$. Nutzen Sie diese Werte und bestimmen Sie c_0 so, dass die Quadraturformel für alle konstanten Polynome exakt ist. Rechnen Sie exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
c_0	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{13}{15}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{19}{9}$	$\frac{26}{21}$

Es muss gelten

$$1 = \int_0^1 1\ dx = \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 \Rightarrow c_0 = 2 - \frac{2}{3}c_1 = \frac{16}{15}.$$

Wir betrachten nun die Funktion $f(x) = \cos(2x) + 4x^2$, welche auf dem Intervall $[-1, 1]$ numerisch integriert werden soll. Dazu wird die n-fach summierte Gauß-Quadratur G_m^n genutzt, wobei auf jedem Teilintervall eine Gauß-Quadratur mit $m+1$ Stützstellen verwendet wird. Die Quadratur soll eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.001$ erreichen.

Hinweis: Nutzen Sie (ohne Beweis), dass für $x \in [-1, 1]$ gilt: $|f^{(2)}(x)| < 9.7$, $|f^{(3)}(x)| \leq 8$, $|f^{(4)}(x)| \leq 16$, $|f^{(5)}(x)| \leq 32$ und $|f^{(6)}(x)| \leq 64$.

5c) Es sei $m = 1$. Bestimmen Sie das kleinstmögliche n, sodass die Quadratur mindestens die Genauigkeit ε erreicht. Rechnen Sie so lange wie möglich exakt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
n	4	2	0	1	3	5	6	7	8	9

Fehlerformel für nicht summierte Gauß-Quadratur (aus der Formelsammlung):

$$|G_m(f) - I(f)| \leq \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3(2m+3)} h^{2m+3} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(2m+2)}(x)|,$$

mit $h = b - a = 2$.

Daraus ergibt sich für die summierte Fehlerformel:

$$\begin{aligned}
|G_m^n(f) - I(f)| &\leq n\frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3(2m+3)} h^{2m+3} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(2m+2)}(x)| \\
&\overset{m=1}{\leq} n\frac{((1+1)!)^4}{((2+2)!)^3(2+3)} h^{2+3} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(2+2)}(x)| = n\frac{16}{24^3\cdot 5}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5 \max_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)| \\
&\leq \frac{1}{4320}\cdot 2^5 \cdot \frac{1}{n^4}\cdot 16 = \frac{16}{135}\cdot\frac{1}{n^4},
\end{aligned}$$

mit $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$. Für die geforderte Genauigkeit muss also gelten

$$\varepsilon \geq \frac{16}{135} \cdot \frac{1}{n^4}.$$

Daraus folgt

$$n^4 \geq \frac{16}{135} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{3200}{27} \Rightarrow n \geq 3.299488...$$

Es folgt $n = 4$.

Die Anwendung der nicht summierten Gauß-Quadratur mit $m = 1$ ergibt den Wert $2\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{8}{3}$.

5d) Bestimmen Sie den tatsächlichen betragsmäßigen Fehler der nicht summierten Quadratur. Rechnen Sie exakt und geben Sie nur das Endergebnis auf 5 signifikante Stellen gerundet an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Error	0.10091	0.45647	0.01943	0.10345	0.27835	0.33894	0.38091	0.42108	0.59104	0.63319

Das gesuchte Integral lässt sich berechnen durch:

$$\int_{-1}^{1} \cos(2x) + 4x^2 = \left[\frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{4}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\sin(2) - \frac{1}{2}\sin(-2) + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \sin(2) + \frac{8}{3}.$$

Also lautet der gesuchte Fehler

$$Error = \left|2\cos\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{8}{3} - \sin(2) - \frac{8}{3}\right| \approx 0.10091.$$