Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Hausübung 1

VF-1: Gegeben sei die Funktion $f(x,y) := (x^3-1)\sin y$, die an verschiedenen Stellen (x,y) ausgewertet werden soll. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	f ist in der Nähe von $(0,0)$ gut konditioniert.	
2.	f ist für alle $(x,y) \in [-0.5, 0.5] \times [-1,1] \backslash \{(0,0)\}$ gut konditioniert.	
3.	f ist in der Nähe von $(1,1)$ gut konditioniert.	
4.	f ist für alle (x,y) mit $x<0$ und $y \neq i\,\pi,\ i \in \mathbb{Z}$ gut konditioniert.	
5.	Berechne die Kondition $\kappa_{\text{rel}}(x,y)$ an der Stelle $x=y=\pi/2$.	

VF-2: Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Division zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.	
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist die Abweichung im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte Fehler.	
3.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es auch stabile Algorithmen.	
4.	Die Funktion $f(x,y) := x-y$ ist gut konditioniert für alle $x<0, y>0$.	
5.	Berechne die Kondition $\kappa_{\text{rel}}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) := x-y$ an der Stelle $(x,y) = (\pi, 3)$.	

VF-3: Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Addition zweier betragsmäßig nahezu gleich großer Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen ist schlecht konditioniert.	
2.	Die Multiplikation zweier nahezu gleich großer Zahlen ist schlecht konditioniert.	
3.	Die Auswertung der Funktion $x\,\mathrm{e}^x$ ist gut konditioniert für alle x mit $\lvert x\rvert \leq 1$.	
4.	Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler aufgrund von Instabilitäten im verwendeten Algorithmus verstärken.	

VF-4: Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei mal stetig differenzierbar und $\alpha > 0$. Dann gilt für die relativen Konditionszahlen $\kappa_{\text{rel}}(f, x) := \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|$:		
1.	$\kappa_{\text{rel}}(\alpha \cdot f, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x)$	
2.	$\kappa_{\text{rel}}(f + g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) + \kappa_{\text{rel}}(g, x)$	
3.	$\kappa_{\text{rel}}(f \cdot g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) + \kappa_{\text{rel}}(g, x)$	
4.	$\kappa_{\text{rel}}(f/g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x)/\kappa_{\text{rel}}(g, x)$	

Aufgabe 1: (Kondition $f(x, y)$)
Die Funktion

$$f(x, y) = 5e^{-((x-1)^2)+(3y)^2}$$

soll an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.9, 0.02)$ untersucht werden.

a) Bestimme die relative Konditionszahl κ_{rel} von f.

b) Ist das Problem an der Stelle (x_0, y_0) gut konditioniert?

c) Der relative Fehler in x und y soll maximal $r_x = 2\%$ bzw. $r_y = 0.1\%$ betragen. Schätze den relativen Fehler in $f(x_0, y_0)$ ab.

d) Wie groß darf die relative Abweichung in x und y maximal sein. damit der relative Fehler in f maximal 0.1% beträegt?

Aufgabe 2: (Matrixnormen)
Bestimme $||A||_\infty$, $||A||_1$ und $||A||_2$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$