Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

# Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

## Hausübung 2

**VF-1:** Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $fl : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|---|---|---|
| 1. | In $\mathbb{M}(10,3,-8,8)$ gilt $\left\lvert\frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}\right\rvert = (1+\varepsilon)x$ mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq 10^{-3}$ $\forall x \in \mathbb{D}$. | |
| 2. | In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt eps $= 5 \cdot 10^{-4}$. | |
| 3. | In $\mathbb{M}(10,3,-8,8)$ gilt $x_{\min} = 10^{-8}$. | |
| 4. | In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt $x_{\max} = 99990000$. | |
| 5. | Gib $x_{\max}$ für $\mathbb{M}(3,3,-4,4)$ als nicht normalisierte Dezimalzahl an. | |

**VF-2:** Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $fl : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlenangaben sind im 10er-System. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|---|---|---|
| 1. | In $\mathbb{M}(7,3,-10,10)$ gilt $\left\lvert\frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}\right\rvert \leq \frac{1}{98}$ $\forall x \in \mathbb{D}$. | |
| 2. | In $\mathbb{M}(100,4,-8,8)$ gilt $x_{\min} = 10^{-10}$. | |
| 3. | In $\mathbb{M}(5,8,-2,9)$ gilt $x_{\min} = 0.008$. | |
| 4. | In $\mathbb{M}(3,2,-4,3)$ gilt $x_{\max} = 18$. | |
| 5. | Gib die Dezimalzahl 5.8 nicht normalisiert in $\mathbb{M}(3,6,-9,9)$ an. | |

| **VF-3:** Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $fl : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
|---|---|---|
| 1. | $\lvert \text{fl}(x) - x \rvert \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$. | |
| 2. | $\left\lvert \frac{\text{fl}(x)-x}{x} \right\rvert \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$. | |
| 3. | Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl $\varepsilon$ mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = (1 + \varepsilon)x$. | |
| 4. | Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl $\varepsilon$ mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \varepsilon$. | |
| 5. | Es sei $f(x) = \frac{1}{1+x}$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$. | |

**Aufgabe 1:** (Auslöschungsbeispiele)
Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b).$$

Berechne $a^2 - b^2$ und $(a + b) \cdot (a - b)$ mit 7-stelliger Rechnung (Achtung, nach jeder Operation muss gerundet werden!) und zum Vergleich mit Taschenrechnergenauigkeit für

a) a = 1.54322 und b = 1.54321

b) a = 1.23456789 und b = 1.234456788

Vergleiche die Ergebnisse und erkläre deine Beobachtung.

**Aufgabe 2:** (Stabilität)
Berechne die folgenden Ausdrücke für die angegebenen Werte von $x$. Welches Phänomen ist zu beobachten? Bring die Ausdrücke auf eine numerisch stabilere Form.

a) $\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ für $x = 29.999$ in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik.

b) $1 - \exp(x^{-3})$ für $|x| > 10$

**Aufgabe 3:** (Gleichungssysteme)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.985 & 2.146 \\ 1.478 & 3.175 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0.597 \\ 0.888 \end{pmatrix}$$

Alle Werte resultieren aus Messungen und sind mit einem absoluten Fehler von maximal 0.0005 behaftet. Mit welchem Fehler (gemessen in der $\infty$-Norm) muss man rechnen, wenn man statt $Ax = b$ das gestörte Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ löst?