RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE

INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Hausübung 3

VF-1: Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = b$:

1.	Das Problem ist immer gut konditioniert.	
2.	Bei Störung der Eingabedaten A und b wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.	
3.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann immer mit dem Standard-Gauß-Algorithmus (ohne Spaltenpivotisierung) berechnet werden.	
4.	Es sei B die zu A gehörige zeilenäquilibrierte Matrix. Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -2.34 & 14.4 \\ 5.67 & 6.78 \end{pmatrix}$ und B die zu A gehörige zeilenäquilibrierte Matrix. Berechne $\|\|B\|\|_\infty$.	

VF-2: Aus der Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gehe die Matrix $A = \begin{pmatrix} 123 & 0.12 \\ 1.23 & 12.3 \end{pmatrix}$ durch Rundung auf drei signifikante Ziffern hervor. ΔA sei die größtmögliche Abweichung $A - \tilde{A}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	$\|\|\Delta A\|\|_1 = 0.505$.	
2.	$\|\|\Delta A\|\|_\infty = 0.505$.	
3.	Für den relativen Fehler von A gemessen in der 1-Norm gilt $r_{A_1} \approx 0.004$.	
4.	Berechne $\|\|A\|\|_1$.	
5.	Berechne $\|\|A\|\|_\infty$.	

VF-3: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	A ist regulär.	
2.	$\det(A) = 0$.	
3.	$\lvert\lvert A\rvert\rvert_\infty = 12$.	
4.	Für eine beliebige rechte Seite $b \in \mathbb{R}^2$ besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung x.	
5.	Berechne $\lvert\lvert A\rvert\rvert_1$.	

VF-4: Seien A, B beliebige $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Weiter sei $\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert$ eine Matrixnorm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an.		
1.	$\lvert\lvert A + B\rvert\rvert \leq \lvert\lvert A\rvert\rvert + \lvert\lvert B\rvert\rvert$.	
2.	$\lvert\lvert A - B\rvert\rvert \leq \lvert\lvert A\rvert\rvert - \lvert\lvert B\rvert\rvert$.	
3.	$\lvert\lvert \lambda A + \mu B\rvert\rvert \leq \lambda\lvert\lvert A\rvert\rvert + \mu\lvert\lvert B\rvert\rvert, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.	
4.	$\lvert\lvert AB\rvert\rvert \leq \lvert\lvert A\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert B\rvert\rvert$.	
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$. Berechne $\det(A^4)$.	

VF-5: Es seien A eine reguläre Matrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Es existiert immer eine Zerlegung $A = LR$.	
2.	Die Determinante von A ist ungleich 0.	
3.	Wenn $A = LR$ ist, dann ist die Determinante von A das Produkt der Diagonaleinträge von R. ($\det(A) = \Pi_{i=1}^{n} r_{ii}$)	
4.	Das homogone System $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1.7 & -2.1 & 1.2 \\ -1.5 & 1.1 & 1.4 \\ 2.2 & 1.3 & -1.5 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechne $\det(D)$.	

VF-6: Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Durch Pivotisierung kann die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden.	
2.	Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.	
3.	Zeilenäquilibrierte Matrizen sind immer gut konditioniert.	
4.	Es sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Bei Störung der Eingabedaten A und b ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -10.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$ und b ungestört. Gib die bestmögliche Schranke für den relativen Fehler r_x der Lösung des linearen Gleichungssystems an.	

Aufgabe: (Choleskey-Zerlegung)
Gegeben seien die Choleskey-Zerlegung $A = LDL^T$ und der Vektor b mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der angegebenen Choleskey-Zerlegung von A.

b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

c) Bestimmen Sie die Choleskey-Zerlegung von

$$B := R^T R \qquad \text{mit} \quad R^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) Ist B symmetrisch positiv definit?