Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Hausübung 3
Musterlösung

VF-1: Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = b$:

1.	Das Problem ist immer gut konditioniert.	falsch
2.	Bei Störung der Eingabedaten A und b wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.	falsch
3.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann immer mit dem Standard-Gauß-Algorithmus (ohne Spaltenpivotisierung) berechnet werden.	falsch
4.	Es sei B die zu A gehörige zeilenäquilibrierte Matrix. Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$.	falsch
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -2.34 & 14.4 \\ 5.67 & 6.78 \end{pmatrix}$ und B die zu A gehörige zeilenäquilibrierte Matrix. Berechne $\|\|B\|\|_\infty$.	1

VF-2: Aus der Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gehe die Matrix $A = \begin{pmatrix} 123 & 0.12 \\ 1.23 & 12.3 \end{pmatrix}$ durch Rundung auf drei signifikante Ziffern hervor. ΔA sei die größtmögliche Abweichung für $A - \tilde{A}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	$\|\|\Delta A\|\|_1 = 0.505$	wahr
2.	$\|\|\Delta A\|\|_\infty = 0.505$	falsch
3.	Für den relativen Fehler von A gemessen in der 1-Norm gilt $r_{A_1} \approx 0.004$.	wahr
4.	Berechne $\|\|A\|\|_1$.	124.23
5.	Berechne $\|\|A\|\|_\infty$.	123.12

VF-3: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	A ist regulär.	wahr
2.	$\det(A) = 0$.	falsch
3.	$\|\|A\|\|_\infty = 12$.	falsch
4.	Für eine beliebige rechte Seite $b \in \mathbb{R}^2$ besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung x.	wahr
5.	Berechne $\|\|A\|\|_1$.	20

VF-4: Seien A, B beliebige $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Weiter sei $\|\|.\|\|$ eine Matrixnorm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an.		
1.	$\|\|A + B\|\| \leq \|\|A\|\| + \|\|B\|\|$.	wahr
2.	$\|\|A - B\|\| \leq \|\|A\|\| - \|\|B\|\|$.	falsch
3.	$\|\|\lambda A + \mu B\|\| \leq \lambda \|\|A\|\| + \mu \|\|B\|\|, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.	falsch
4.	$\|\|AB\|\| \leq \|\|A\|\| \cdot \|\|B\|\|$.	wahr
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$. Berechne $\det(A^4)$.	81

VF-5: Es seien A eine reguläre Matrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Es existiert immer eine Zerlegung $A = LR$.	falsch
2.	Die Determinante von A ist ungleich 0.	wahr
3.	Wenn $A = LR$ ist, dann ist die Determinante von A das Produkt der Diagonaleinträge von R. ($\det(A) = \Pi_{i=1}^n r_{ii}$)	wahr
4.	Das homogone System $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$.	wahr
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1.7 & -2.1 & 1.2 \\ -1.5 & 1.1 & 1.4 \\ 2.2 & 1.3 & -1.5 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechne $\det(D)$.	0.01

VF-6: Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Durch Pivotisierung kann die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden.	wahr
2.	Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.	falsch
3.	Zeilenäquilibrierte Matrizen sind immer gut konditioniert.	falsch
4.	Es sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Bei Störung der Eingabedaten A und b ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	falsch
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -10.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$ und b ungestört. Gib die bestmögliche Schranke für den relativen Fehler r_x der Lösung des linearen Gleichungssystems an.	0.33333