Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Hausübung 4

VF-1: Beantworte alle Fragen bezüglich orthogonaler Matrizen mit wahr oder falsch.		
1.	Orthogonale Matrizen sind stets symmetrisch.	
2.	Orthogonale Matrizen sind stets identisch mit ihrer Inversen.	
3.	Die $\|.\|_2$-Norm jeder Zeile und Spalte einer orthogonalen Matrix ist stets gleich 1.	
4.	Produkte orthogonaler Matrizen sind wieder orthogonal.	

VF-2: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und κ_2 bezeichne die Kondition bzgl. der $\|.\|_2$-Norm.		
1.	$Q^T Q = Q Q^T = I$.	
2.	$\lvert \det(Q)\rvert = \|Q\|_2 = \|Q^T\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = \kappa_2(Q) = \kappa_2(Q^T) = \kappa_2(Q^{-1}) = 1$.	
3.	$\|Q\,x\|_2 = \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m$.	
4.	$\|Q\,A\|_2 = \|A\|_2 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.	
5.	$\kappa_2(QA) = \kappa_2(A\,Q) = \kappa_2(A) \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.	
6.	Es seien $m = 2$ und $x = (3,4)^T$. Berechne $\|Q\,x\|_2$.	

VF-3: Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q\,R = A$ eine Zerlegung von A mit Q orthogonal und R eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$	
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\kappa_2(R)$	
3.	Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.	
4.	$\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(R)$	
5.	Gib das kleinste β an, für das die Ungleichung $\|Q\,x\|_2 \leq \beta\,\|x\|_2$ allgemein gültig ist.	

VF-4: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q = I - \frac{v\,v^T}{v^T v}$.	
2.	Es gilt stets $Q = Q^T$.	
3.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Qy = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$	
4.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$ gilt: $Qy = y$.	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um A mit Householdertransformationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa $\alpha\, n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib p an.	

VF-5: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Summe zweier orthogonaler $m\times m$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	
2.	Das Householder-Verfahren zur Berechnung einer $Q\,R$-Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung nicht stabil.	
3.	Die einzelnen Schritte des Givens-Algorithmus zur QR-Zerlegung von A lassen sich geometrisch als Drehungen interpretieren.	
4.	Eine Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um A mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa $\alpha\, n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib p an.	
6.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Um A mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa $\alpha\, n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib α an.	

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \le m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.		
1.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 \to \min \Leftrightarrow A^T\,(A\,x - b) = 0$.	
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Es sei $Q\,b =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n,\ b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1} b_1$.	
4.	Die Matrix R kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	
5.	Es sei $Q\,A = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ die $Q\,R$-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme $\|r\|$.	

VF-7: Sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Wir betrachten das lineare Ausgleichsproblem: bestimme x^* mit minimaler 2-Norm, sodass $\|\|Ax^* - b\|\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|\|Ax - b\|\|_2$.		
1.	Die Pseudoinverse von A ist gegeben durch $A^+ = V\Sigma U^T$.	
2.	$x^* = A^+b$ ist die Lösung des allgemeinen linearen Ausgleichsproblems.	
3.	Für eine reguläre Matrix A gilt $x^* = A^{-1}b$	
4.	Es seien σ_1 der größte und σ_r der kleinste (positive) Singulärwert von A. Dann gilt: $\|\|A\|\|_2 = \sigma_r$.	
5.	Es seien $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme x_2^*.	

Aufgabe 1: (Lineare Ausgleichsprobleme - Normalgleichung)
Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte y_i

t_i	-1	1	2
y_i	1	3	3

Bestimme die Gerade $y(t) = at + b$ so, dass die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{3}(y(t_i) - y_i)^2$ minimal wird. Formuliere dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $||Ax - y||_2 \to \min$ und löse dieses mittels Normalgleichung.

Aufgabe 2: (Lineare Ausgleichsprobleme - Householder)
Eine Kurve der Darstellung $f(x) = \alpha\, x + \ln(\beta\, x)$ soll derart an drei Messpunkte (x_i, y_i) angepasst werden, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal ist. Berechne α und β mithilfe von Householder-Transformationen zu

x_i	1	3	4
y_i	1	2	2