

RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
 INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK
Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
 Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Hausübung 5

VF-1: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit Norm $\ \cdot\ $ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt.		
1.	Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ .	
2.	Es existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	
3.	Für Startwerte $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration für Φ höchstens mit Konvergenzordnung 1.	
4.	Die Funktion Φ ist auf D stetig differenzierbar.	
5.	$\Phi(x) = e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$. Gib für das Intervall $[0, 1]$ die bestmögliche Kontraktionszahl L an.	

VF-2: Mit $k \in \mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k \in \mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen x^* , wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $ x_{k+1} - x^* \leq c x_k - x^* ^p$ für alle $k \geq k_0$ gilt.	
2.	Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen x^* , wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $ x_{k+1} - x^* \leq c x_k - x^* $ für alle $k \geq k_0$ gilt.	
3.	Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \rightarrow \infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor p vergrößert.	
4.	Je größer die Konvergenzordnung p ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$.	
5.	Es seien nun zusätzlich $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion Φ und $\Phi'(x^*) = 0$. Dann ist die Konvergenzordnung mindestens p . Gib p an.	

VF-3: Sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $ \Phi'(x^*) < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $ x_0 - x^* $ hinreichend klein ist.	
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.	
3.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.	
4.	Für $\Phi(x) = 5 \arctan(x) + 8$ konvergiert das Fixpunktverfahren für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von Φ in $\mathbb{R}$.	
5.	Es sei wieder $\Phi(x) = 5 \arctan(x) + 8$. Gib für das Intervall $[8, 200]$ die bestmögliche Kontraktionszahl L an.	

VF-4: Es seien $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.		
1.	Falls $ \Phi'(x^*) < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $ x_0 - x^* $ hinreichend klein.	
2.	Falls $ \Phi'(x^*) > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.	
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1.	
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $ x_0 - x^* $ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	

VF-5: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \neq -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.		
1.	Das Problem $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung.	
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.	
3.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ erfüllt.	
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > 0$.	
5.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > \frac{1}{2}$ mit der Konvergenzordnung p . Gib p an.	

VF-6: Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{x^2} - 4$.		
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^* .	
2.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^* .	
3.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^* .	
4.	Das Newton-Verfahren, angewandt auf f , konvergiert für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ gegen eine Nullstelle x^* .	
5.	Zur Lösung des Nullstellenproblems von f wird Newton-Verfahren angewandt mit dem Startwert $x_0 = 1$. Geben Sie x_1 an.	

Aufgabe 1: (Fixpunktsatz von Banach)

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 3\pi x - \cos(\frac{\pi}{2}x)$.

- Zeigen Sie, dass f im Intervall $I = [0, 1]$ genau eine Nullstelle $x^* \in I$ besitzt.
- Ausgehend vom Startwert x_0 haben Sie nach einem Schritt der Fixpunktiteration die Approximation x^1 mit $|x^1 - x^0| = 10^{-5}$ bestimmt. Welchen absoluten Fehler der Approximation x^1 können Sie garantieren?

Aufgabe 2: (Newtonverfahren- Sekantenverfahren)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := e^{-x} - \frac{1}{2}(x-1)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In $[1, 2]$ hat f genau eine Nullstelle. Diese Nullstelle soll angenähert werden.

- Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.5$ zwei Schritte mit dem Newtonverfahren aus.
- Führen Sie ausgehend von den Startwerten $x_0 = 1$ und $x_1 = 2$ zwei Schritte mit dem Sekantenverfahren aus.