RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE

INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK

# Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

## Hausübung 5
## Musterlösung

| | | |
|---|---|---|
| **VF-1:** Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion $\Phi$ mit Norm $\|\cdot\|$ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt. | | |
| 1. | Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von $\Phi$. | falsch |
| 2. | Es existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$. | wahr |
| 3. | Für Startwerte $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration für $\Phi$ höchstens mit Konvergenzordnung 1. | falsch |
| 4. | Die Funktion $\Phi$ ist auf $D$ stetig differenzierbar. | falsch |
| 5. | $\Phi(x) = e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$. Gib für das Interval $[0, 1]$ die bestmögliche Kontraktionszahl $L$ an. | 0.85776 |

| | | |
|---|---|---|
| **VF-2:** Mit $k \in \mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k \in \mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
| 1. | Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen $x^*$, wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|^p$ für alle $k \geq k_0$ gilt. | wahr |
| 2. | Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen $x^*$, wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\|x_k - x^*\|$ für alle $k \geq k_0$ gilt. | falsch |
| 3. | Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \to \infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor $p$ vergrößert. | wahr |
| 4. | Je größer die Konvergenzordnung $p$ ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$. | falsch |
| 5. | Es seien nun zusätzlich $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $\Phi$ und $\Phi'(x^*) = 0$. Dann ist die Konvergenzordnung mindestens $p$. Gib $p$ an. | 2 |

**VF-3:** Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $|\Phi'(x^*)| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein ist. | wahr |
| 2. | Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein. | wahr |
| 3. | Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1. | wahr |
| 4. | Für $\Phi(x) = 5\arctan(x) + 8$ konvergiert das Fixpunktverfahren für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von $\Phi$ in $\mathbb{R}$. | wahr |
| 5. | Es sei wieder $\Phi(x) = 5\arctan(x) + 8$. Gib für das Interval $[8, 200]$ die bestmögliche Kontraktionszahl $L$ an. | 0.076923 |

**VF-4:** Es seien $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $x^\star$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Falls $|\Phi'(x^\star)| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte $x_0$ mit $|x_0 - x^\star|$ hinreichend klein. | wahr |
| 2. | Falls $|\Phi'(x^\star)| > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^\star$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$ . | falsch |
| 3. | Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1. | wahr |
| 4. | Falls $\Phi'(x^\star) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte $x_0$ mit $|x_0 - x^\star|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1. | wahr |

**VF-5:** Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x \neq -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Das Problem $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung. | falsch |
| 2. | Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für $\Phi$ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt. | wahr |
| 3. | Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für $\Phi$ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ erfüllt. | falsch |
| 4. | Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > 0$. | wahr |
| 5. | Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > \frac{1}{2}$ mit der Konvergenzordnung $p$. Gib $p$ an. | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| **VF-6:** Sei $x^*$ eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{x^2} - 4$. | | |
| 1. | $f$ hat eine eindeutige Nullstelle $x^*$. | falsch |
| 2. | Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, konvergiert gegen eine Nullstelle $x^*$. | falsch |
| 3. | Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle $x^*$. | wahr |
| 4. | Das Newton-Verfahren, angewandt auf $f$, konvergiert für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ gegen eine Nullstelle $x^*$. | wahr |
| 5. | Zur Lösung des Nullstellenproblems von $f$ wird Newton-Verfahren angewandt mit dem Startwert $x_0 = 1$. Geben Sie $x_1$ an. | 1.2358 |