

RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
 INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK
Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
 Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Hausübung 6

VF-1: Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$. Wir nehmen an, dass $\text{Rang}(F'(x)) = n$ für alle x . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.
2.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen quadratisch.
3.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen nicht schneller als linear.
4.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren hat den Zweck, die Konvergenzgeschwindigkeit der Gauß-Newton Methode zu beschleunigen.
5.	Sei nun $F(x, y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2xy-3 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\ F(x, y)\ _2 \rightarrow \min$. Bestimme (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und gib x_1 an.

VF-2: Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ hinreichend oft differenzierbar mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(x^*)\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$. Sei $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$.
2.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$.
3.	$\nabla \phi(x^*) = 0$.
4.	Die Aufgabe $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$ ist einfacher zu lösen als die Aufgabe $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$.
5.	Sei nun $F(x, y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ (2y-3)^2 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\ F(x, y)\ _2 \rightarrow \min$. Bestimme (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und gib y_1 an.

VF-3: Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Wir nehmen an, dass $\text{Rang } F'(x) = n$ für alle x . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Ein Gauß-Newton-Verfahren kann mit einer Dämpfungsstrategie kombiniert werden.	
2.	Lokale Maxima oder Sattelpunkte der Funktion $x \mapsto \ F(x)\ _2^2$ sind für das Gauß-Newton-Verfahren immer abstoßend.	
3.	Lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens in einer Umgebung eines (lokalen) Minimums x^* ist gesichert, falls $\ F(x^*)\ _2$ hinreichend klein ist und alle Komponenten von $F''(x)$ beschränkt sind.	
4.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenzordnung der Methode im Allgemeinen genau 1.	
5.	Es seien $m = 2$ und $n = 1$ sowie $F(x) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 6x - 4 \end{pmatrix}$. Gib $\ F(x^*)\ _2^2$ an.	

VF-4: Es sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur s^k durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ($\mu > 0$ ein zu wählender Parameter):

1.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F'(x^k)s^k + F(x^k)\ _2 + \mu\ s^k\ _2 = \min$	
2.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F'(x^k)s^k + F(x^k)\ _2^2 + \mu^2\ s^k\ _2^2 = \min$	
3.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\ \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\ _2 = \min$	
4.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\ \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\ _2 = \min$	
5.	Es seien $m = 2$, $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} (x - \frac{1}{3})^2 \\ 6x - 2 \end{pmatrix}$. Gib x^* an.	

Aufgabe 1: (Nichtlinearer Ausgleich)

Gegeben seien die Messdaten

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -3 & 0 & 5 \\ \hline y_i & 1.1 & 2.1 & 3.1 \end{array},$$

die zu der Bildungsvorschrift

$$y(t) = a\sqrt{b+t} \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

gehören.

Bestimmen Sie eine Approximation für die Parameter a, b , indem Sie einen Schritt mit dem Gauß-Newton-Verfahren zu den Startwerten $a = 1, b = 4$ durchführen. Lösen Sie das dabei entstehende lineare Ausgleichsproblem, indem Sie zu den Normalgleichungen übergehen.

Aufgabe 2: (Nichtlinearer Ausgleich)

Gegeben seien die Messwerte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & 1 & 2 & 4 \\ \hline y_i & 0.2 & 0.7 & 0.6 \end{array}.$$

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = e^{-\lambda(t-\alpha)^2}$$

gehören.

- Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem auf (Messwerte einsetzen!).
- Für das Gauß-Newton-Verfahren seien die Startwerte $\alpha_0 = 3$ und $\lambda_0 = 0.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden!).
- Lösen Sie stattdessen das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie den Wert des Residuums explizit an.