Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

**Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20**

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

# Hausübung 6
# Musterlösung

**VF-1:** Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Wir nehmen an, dass $\mathrm{Rang}\,(F'(x)) = n$ für alle $x$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Die Gauß-Newton Methode ist immer lokal quadratisch konvergent. | falsch |
| 2. | Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen quadratisch. | falsch |
| 3. | Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen nicht schneller als linear. | wahr |
| 4. | Das Levenberg-Marquardt-Verfahren hat den Zweck, die Konvergenzgeschwindigkeit der Gauß-Newton Methode zu beschleunigen. | falsch |
| 5. | Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2\,x\,y-3 \\ 3\,y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestimme $(x_1,y_1)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren ausgehend vom Startwert $(x_0,y_0)=(0,0)$ und gib $x_1$ an. | 0.5 |

**VF-2:** Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hinreichend oft differenzierbar mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Sei $\phi(x) := \frac{1}{2}F(x)^T F(x)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. | falsch |
| 2. | $\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$. | wahr |
| 3. | $\nabla\phi(x^*) = 0$. | wahr |
| 4. | Die Aufgabe $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$ ist einfacher zu lösen als die Aufgabe $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. | falsch |
| 5. | Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ (2\,y-3)^2 \\ 3\,y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestimme $(x_1,y_1)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren ausgehend vom Startwert $(x_0,y_0)=(0,0)$ und gib $y_1$ an. | 0.74510 |

**VF-3:**Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Wir nehmen an, dass Rang $F'(x) = n$ für alle $x$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Ein Gauß-Newton-Verfahren kann mit einer Dämpfungsstrategie kombiniert werden. | wahr |
| 2. | Lokale Maxima oder Sattelpunkte der Funktion $x \mapsto \|F(x)\|_2^2$ sind für das Gauß-Newton-Verfahren immer abstoßend. | wahr |
| 3. | Lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens in einer Umgebung eines (lokalen) Minimums $x^*$ ist gesichert, falls $\|F(x^*)\|_2$ hinreichend klein ist und alle Komponenten von $F''(x)$ beschränkt sind. | wahr |
| 4. | Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenzordnung der Methode im Allgemeinen genau 1. | wahr |
| 5. | Es seien $m = 2$ und $n = 1$ sowie $F(x) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 6x - 4 \end{pmatrix}$. Gib $\|F(x^*)\|_2^2$ an. | 0.1 |

**VF-4:** Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!
Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur $s^k$ durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ($\mu > 0$ ein zu wählender Parameter):

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2 + \mu\|s^k\|_2 = \min$ | falsch |
| 2. | Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2\|s^k\|_2^2 = \min$ | wahr |
| 3. | Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$ | wahr |
| 4. | Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$ | falsch |
| 5. | Es seien $m = 2$, $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \\ 6x - 2 \end{pmatrix}$. Gib $x^*$ an. | 0.33333 |