Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Kleingruppenübung: Übung 1

VF-1: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = x\,e^{4\,y^2}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an. (Der relative Fehler der Eingabe wird bezüglich der 1-Norm gemessen.)

1.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = 1 + 8\,y^2$.	
2.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \max(1, 8\,y^2)$.	
3.	Das Problem ist schlecht konditioniert für $\lvert x\rvert \to \infty$.	
4.	Das Problem ist gut konditioniert für $x^2 + y^2 \leq 0.1$.	
5.	Berechne die relative Konditionszahl für $x = 2$ und $y = 3$.	

VF-2: Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an.

1.	Die Multiplikation zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.	
2.	Die Konditionszahl einer Funktion ist stets größer als 1.	
3.	Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Lösungsverfahren.	
4.	Die Funktion $f(x, y) := x + y$ ist gut konditioniert für alle $x > 0, y > 0$.	
5.	Berechne die Kondition $\kappa_{rel}(x)$ der Funktion $f(x) = e^{x^3}$ an der Stelle $x = 2$.	

Aufgabe 1: (Kondition $f(x, y)$)
Die Funktion

$$f(x, y) = \cos(1.5x)\sin(2y)$$

soll an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$ untersucht werden.

a) Bestimme die relative Konditionszahl κ_{rel} von f.

b) Ist das Problem an der Stelle (x_0, y_0) gut konditioniert?

c) Der relative Fehler in x und y soll maximal $r_x = 0.02\%$ bzw. $r_y = 1\%$ betragen. Schätze den relativen Fehler in $f(x_0, y_0)$ ab.

d) Wie groß darf die relative Abweichung in x und y maximal sein. damit der relative Fehler in f maximal 1% beträegt?

Aufgabe 2: (Umformungen für eine feste Stelle) Klausuraufgabe Frühjahr 2014
Der Ausdruck

$$f := (\sqrt{5} - 2)^2$$

kann mittels binomischer Formeln umgeformt werden zu

$$(\sqrt{5} - 2)^2 = \left(\frac{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5} + 2}\right)^2 = \frac{1}{(\sqrt{5} + 2)^2} = \frac{1}{9 + 4\sqrt{5}}$$

Welche der Darstellungen $(\sqrt{5} - 2)^2$ und $\frac{1}{9+4\sqrt{5}}$ liefert voraussichtlich das bessere Ergebnis, wenn bei der Auswertung die Näherung $\sqrt{5} \approx 2.2$ verwendet wird? Begründen Sie Ihre Antwort, ohne f explizit auszuwerten. Schätzen Sie dazu den relativen Fehler ab, der entsteht, wenn man die Näherung $\sqrt{5} \approx 2.2$ benutzt.