Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Kleingruppenübung: Übung 2

VF-1: Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := fl(fl(x) - fl(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Es existiert ein $x \in \mathbb{D}$, so dass $\frac{\lvert \mathrm{fl}(x)-x \rvert}{\lvert x \rvert} = \text{eps}$.	
2.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	
3.	Die Zahl 17 ist in $\mathbb{M}(2, 6, -4, 4)$ exakt darstellbar.	
4.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.	
5.	Es gilt $\frac{\lvert (x\ominus y)-(x-y) \rvert}{\lvert x-y \rvert} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$ mit $x \neq y$.	
6.	Es gilt $\frac{\lvert (x\ominus y)-(x-y) \rvert}{\lvert x-y \rvert} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$ mit $x \neq y$.	
7.	Berechne $x_{\max}$ für $\mathbb{M}(3, 2, -1, 4)$.	

VF-2: Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\max}, -x_{\min}] \cup [x_{\min}, x_{\max}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	In $\mathbb{M}(10, 8, -2, 4)$ gilt: $x_{\min} = 0.001$.	
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $fl(x) = x + \epsilon$.	
3.	Es gilt $\left\lvert \frac{fl(x)-x}{x} \right\rvert \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
4.	Die Zahl 256 ist in $\mathbb{M}(2, 4, -6, 6)$ exakt darstellbar.	
5.	Gib die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 93 in $\mathbb{M}(5, 8, -8, 8)$ an.	

VF-3:		
1.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y\, e^{x^2}$. Für $x = 1$ und $y \neq 0$ hat die relative Konditionszahl den Wert $\kappa_{rel} = 2$.	
2.	Die Funktion $f(x, y) = x - y$ ist für alle (x, y) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gut konditioniert.	
3.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
4.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es stabile Algorithmen zur Lösung des Problems.	
5.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y\, e^{x^2}$. Gib die relative Konditionszahl κ_{rel} für $x = 3$ und $y = 7$ an.	
6.	Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y, z) = x\, y^2\, z^3$. Gib die relative Konditionszahl κ_{rel} für $(x, y, z) = (e, \pi, \sqrt{3})$ an.	

Aufgabe 1: (Auslöschungsbeispiele)
Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b).$$

Berechne $a^2 - b^2$ und $(a+b) \cdot (a-b)$ mit 7-stelliger Rechnung (Achtung, nach jeder Operation muss gerundet werden!) und zum Vergleich mit Taschenrechnergenauigkeit für

a) a = 1234.56 und b = 1234.55

b) a = 5789.576 und b = 5784.075

Vergleiche die Ergebnisse und erkläre deine Beobachtung.

Aufgabe 2: (Stabilität)
Berechne die folgenden Ausdrücke für die angegebenen Werte von x. Welches Phänomen ist zu beobachten? Bring die Ausdrücke auf eine numerisch stabilere Form.

a) $\frac{1}{1+2x} - \frac{1-x}{1+x}$ für $|x| \ll 1$

b) $\frac{1-\cos x}{x}$ für $x \neq 0$ und $|x| \ll 1$

Aufgabe 3: (Gleichungssysteme)
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme $\kappa(A)$ für die 1-, 2- und $\infty-$Norm.

b) Schätze den relativen Fehler ab, der entsteht, wenn man statt $Ax = b$ das gestörte System $\tilde{A}x = b$ mit $|\varepsilon| < 0.5$ löst.

Hinweise:

- Die Inverse von A ist gegeben durch:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Das charakteristische Polynom von $A^T A$ lautet $P(x) = (x-2)(x^2 - 9x + 2)$.