

RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
 INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK
Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
 Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Kleingruppenübung: Übung 3

VF-1: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig.		
1.	$\ A\ _\infty = \ A^T\ _1$	
2.	Falls A invertierbar ist, gilt $\ AA^{-1}\ = \ A\ \cdot \ A^{-1}\ $	
3.	$\kappa(A) = 1 \Rightarrow A = I$.	
4.	$\kappa(A) = \ A\ \cdot \ A^T\ $	
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Berechne $\kappa_2(A)$.	

VF-2: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung von A mit $A = LR$.	
2.	Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R , so dass $A = LR$.	
3.	Es sei P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $ \det(A) = \det(R) $	
4.	$\ A\ _\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{ji} $	

VF-3: Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seien L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix.		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine LDL^T -Zerlegung mit $A = LDL^T$.	
2.	Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T -Zerlegung, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
3.	Nur mithilfe einer zusätzlichen Pivotisierung kann man garantieren, dass beim Choleskey-Algorithmus keine Division durch Null auftritt.	
4.	Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Choleskey-Algorithmus eine Zerlegung $A = LDL^T$ finden.	
5.	Ist A regulär und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T -Zerlegung, so dass $A = LDL^T$ gilt.	
6.	Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R , so dass $A = LR$.	
7.	Es sei $A = LDL^T$ die LDL^T -Zerlegung von A mit einer Diagonalmatrix D , für die $\det(D) > 0$ gilt. Dann ist A symmetrisch positiv definit.	
8.	Es seien $n = 4$ und $A = LDL^T$ die LDL^T -Zerlegung von A mit einer Diagonalmatrix D , für die $d_{ii} = i$ (mit $i = 1, \dots, 4$) gilt. Berechne $\det(A)$	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrisch positiv-definite Matrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Lösung von $Rx = b$ benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
2.	Die Lösung von $Ax = b$ per Gaußelimination benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
3.	Die Lösung von $Sx = b$ per Choleskey-Zerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
4.	Die Skalierung von A benötigt $\mathcal{O}(n^2)$ Ops	
5.	Die Lösung von $Ax = b$ per Gaußelimination benötigt $\alpha n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops. Gib α an.	

Aufgabe 1: (Spaltenpivotisierung)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

- Löse $Ax = b$ in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *ohne* Spaltenpivotisierung.
- Löse $Ax = b$ in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Spaltenpivotisierung.
- Vergleiche die Lösungen aus a) und b) mit der exakten Lösung $x = (1.000200040, 0.9998999800)^T$. Erkläre deine Beobachtung.

Aufgabe 2: (Pivotisierung/Äquilibration)

Um die Schwächen der Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung aufzuzeigen, betrachten wir das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 & 2512 \\ 0.9 & -1.3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 837.9 \\ 0.1674 \end{pmatrix}.$$

- Löse $Ax = b$ in 5-stelliger Gleitpunktarithmetik mit Hilfe der Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung. Vergleiche die gestörte Lösung mit der exakten Lösung $x = (0.66700, 0.33300)^T$. Wodurch entstehen die großen Abweichungen?
- Skaliere das Gleichungssystem mit Hilfe einer Äquilibration (d.h. $DAx = Db$, mit $\|DA\|_\infty = 1$), und berechne die Lösung des skalierten Systems mit Hilfe der Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung in 5-stelliger Gleitpunktarithmetik. Vergleiche deine Ergebnisse mit den Ergebnissen aus a).

Aufgabe 3: (Cholesky-Zerlegung)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.
- Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit?
- Berechnen Sie die Determinante von A . Benutzen Sie dabei die Cholesky-Zerlegung.
- Es sei nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^T x = b$. Berechnen Sie dabei weder LD noch DL^T .