Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Kleingruppenübung: Übung 4

VF-1: Es seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix und $A = Q\,R$. Ferner bezeichne $\kappa_2(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $A^{-1} = R^T Q^T$.	
2.	Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.	
3.	Nicht alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ besitzen eine QR-Zerlegung.	
4.	Eine QR-Zerlegung kann man stets auf stabile Weise mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um A mit Householdertransformationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa $\alpha\, n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib α an.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, sodass $Q\,A = R$ gilt. Sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $x^\star = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen $A\,x^\star$ und b.

1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.	
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Die Matrix R kann man über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	
4.	Es gilt $A\,x^\star - b \perp \text{Bild}(A)$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme Θ.	

VF-3: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betrachten wir das lineare Ausgleichsproblem: Bestimme x^* mit minimaler 2-Norm, sodass $\|\|Ax^* - b\|\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|\|Ax - b\|\|_2$.		
1.	Es sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von A. Ist A regulär, so gilt: $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^T$.	
2.	Es seien σ_1 der größte und σ_r der kleinste (strikt positive) Singulärwert von A. Dann gilt: $\|\|A\|\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$.	
3.	Die Lösung x^* des linearen Ausgleichsproblem mit minimaler 2-Norm ist immer eindeutig.	
4.	Es seien $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale Matrizen. Dann haben A und Q_1AQ_2 die selben Singulärwerte.	
5.	Es sei $A = U\Sigma V^T$ mit $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ und $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Singulärwertzerlegung von A und es sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme x_1^*.	

Aufgabe 1: (Givens-Rotationen)
Es sei $x = (2, 2, 1)^T$. Bestimme Givens-Rotationen G_1 und G_2, sodass

$$G_2 G_1 x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2: (Lineare Ausgleichsprobleme - Householder)
Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte y_i:

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -1 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 1 & 3 & 3 \end{array}.$$

Bestimme die Gerade $y(t) = at + b$, sodass die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{3} (y(t_i) - y_i)^2$ minimal wird.

a) Formuliere dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $||Ax - y||_2 \to \min$.

b) Löse dieses mittels Householder-Spiegelungen. Ergänze dazu die fehlenden Werte im folgenden Householder-Tableau:

			1	-1	1	
			1	1	3	
			1	2	3	$\alpha_1 = \cdots$
$\cdots$	1	1	(4.73205)	$\cdots$	$\cdots$	$\beta_1 = \cdots$
		0.57735	$\cdots$	$\cdots$	-4.04145	
		0.211325	0	$\cdots$	1.1547	
		0.211325	0	$\cdots$	1.1547	$\alpha_2 = \cdots$
	$\cdots$	1.94338		(6.70459)	5.82777	$\beta_2 = 0.149152$
			$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$x_1 = \cdots$
		0.46291	0	$\cdots$	-1.54303	$x_2 = \cdots$
		0.289857	0	0	$\cdots$	$res = \cdots$

Aufgabe 3: (Lineare Ausgleichsprobleme - Normalgleichung)
Eine Kurve der Darstellung $f(x) = \alpha\, x + \ln(\beta\, x)$ soll derart an drei Messpunkte (x_i, y_i)

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 1 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

angepasst werden, dass die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{3} (f(x_i) - y_i)^2$ minimal ist.

a) Formuliere dazu das entsprechende lineare Ausgleichsproblem.

b) Löse dieses mithilfe der Normalgleichung. Gib $f(x)$ explizit an.