Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Kleingruppenübung: Übung 5

VF-1: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 0.1 + \frac{1}{2}\sin(x)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.

1.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 0]$ erfüllt.	
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.	
3.	Das Problem $x = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, hat eine eindeutige Lösung.	
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.	
5.	Berechne x_2 zu $x_0 = 0$.	

VF-2: Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	Es seien $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Iterationsvorschrift und x^* ein Fixpunkt, d.h. $\Phi(x^*) = x^*$. Dann gilt: $\lvert\Phi'(x^*)\rvert < 1$.	
2.	Es sei $\Phi(x)$ eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, die die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Außerdem gilt $\Phi(x^*) = x^*$ für ein $x^* \in [a, b]$ mit $x^* \neq 0$. Dann konvergiert das Newtonverfahren, angewendet auf $\Phi(x)$ immer für alle Startwerte $x_0 \in [a, b]$ gegen x^*.	
3.	Die Konvergenzordnung des Sekanten-Verfahrens ist ungefähr 1.6.	
4.	Das Newton-Verfahren ist global konvergent mit Konvergenzordnung 1 und hat lokal die Konvergenzordnung 2	
5.	Es sei $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten das Newton-Verfahren zur Annährung der Nullstelle dieser Funktion mit Startwert $x_0 = 1$. Berechne x_1.	
6.	Es sei $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annährung der Nullstelle dieser Funktion mit Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Berechne x_2.	

VF-3: Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
2.	Das Bisektionsverfahren ist ein Fixpunktverfahren.	
3.	Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	

Aufgabe 1: (Fixpunktiteration)
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{\exp(x)}$$

a) Zeigen Sie, dass f im Intervall $[0, 1]$ genau einen Fixpunkt besitzt.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = \frac{1}{2}$ drei Fixpunktiterationen durch.

c) Wie viele Iterationen sind laut der a-priori-Fehlerabschätzung maximal nötig, um den Fixpunkt ausgehend von $x_0 = \frac{1}{2}$ mit einer Genauigkeit von 10^{-2} zu bestimmen?

Aufgabe 2: (Newtonverfahren für Systeme)
Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x^2 + 5y^2 - 6xy &= 8 \\ x^2 + xy &= 1 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen des Newtonverfahrens für Systeme.
Benutzen Sie als Startwert $(x_0, y_0) = (-1.1, 0.3)$