Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Kleingruppenübung: Übung 6

VF-1: Es seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $x^\star \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems $\|F(x)\|_2 \to \min$ sowie $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$. Weiterhin nehmen wir an, dass $x^\star$ in einer Umgebung U eindeutig ist und $F'(x)$ in U vollen Rang hat.

1.	$\phi(x^\star) = \min_{x \in U} \phi(x)$.	
2.	Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems kann als Fixpunktiteration geschrieben werden mit der Iterationsfunktion: $\mathbf{\Phi}(x) := x - \left(F'(x)^T F'(x)\right)^{-1} \nabla\phi(x)$.	
3.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, dann konvergiert sie lokal quadratisch.	
4.	Lokale Maxima und Sattelpunkte sind für die Gauß-Newton-Methode abstoßend.	
5.	Das Gauß-Newton-Verfahren konvergiere mit der genauen Konvergenzordnung 2. Dann konvergiert das Levenberg-Marquardt mit konstantem $\mu = 1$ höchstens mit der Konvergenzordnung p. Gib p an.	

VF-2: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Weiterhin nehmen wir an, dass $x^\star$ in einer Umgebung U eindeutig sowie F zweimal stetig differenzierbar ist und $F'(x)$ in U vollen Rang hat. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch, bzw. gib einen numerischen Wert an!

1.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	
2.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von ϕ bestimmen.	
3.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von ϕ bestimmen.	
4.	Wenn $\|F(x^\star)\|_2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.	
5.	Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2\,x\,y - 3 \\ 3\,y - 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Problem $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestimme (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0,0)$ und gib y_1 an.	

VF-3: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch, bzw. gib einen numerischen Wert an!		
1.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	
2.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	
3.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.	
4.	Beim Gauß-Newton-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.	
5.	Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2\,x-3 \\ 3\,y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten das Problem $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestimme (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) = (0,0)$ und gib x_1 an.	

Aufgabe: (Nichtlinearer Ausgleich)
Gegeben seien Messwerte

x_i	2	3	4
y_i	0	2	0

die zu der Bildungsvorschrift

$$G(a,b;x,y) = (x-a)^2 + e^{b(x^2+y^2)} - 5 = 0$$

gehören.

a) Stelle das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $||F(x)||_2 \to \min$ explizit auf (Messwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 4$, $b_0 = 0$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt?

c) Führe den ersten Schritt über die Normalengleichung durch. Gib das Residuum explizit an.

d) Führe den zweiten Schritt mittels Givens-Rotationen durch. Gib das Residuum explizit an.