Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerische Mathematik für Elektrotechniker — WS 19/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels
Dr. Karl-Heinz Brakhage — Thomas Jankuhn — Christian Löbbert

Kleingruppenübung: Übung 7

VF-1: Es seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Der Wert $[x_0, x_1, \dots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.	
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) ω_j gilt: $[x_0, \dots x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \dots, n$	
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und n^2 Subtraktionen.	
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.	
5.	Der Aufwand zur Auswertung des Newtonschen-Interpolationspolynoms mit dem Hornerschema beträgt etwa $\alpha\, n^p$ Operationen. Gib p an.	

VF-2: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$.
Weiter sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \dots, x_n]\, f$.	
2.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n!\, \delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$	
3.	$[x_0, x_1]\, f = f(x_1) - f(x_0)$..	
4.	Mit $f(x) := 2x^4$ gilt $[x_0, \dots, x_n]\, f = 2$ für alle $n \geq 4$.	
5.	Berechne $[0, 1, 2, 3]\,(5\,x^3 + x - 5)$.	

VF-3: Es sei $P(f\,\vert\,x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)),\ldots,(x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Weiter sei $[x_0,\ldots,x_n]\,f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(Q\,\vert\,x_0,\ldots,x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	
2.	Es gilt $P(f\,\vert\,x_0,\ldots,x_n)(x) = P(f\,\vert\,x_{n-1},\ldots,x_0)(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})[x_0,\ldots,x_n]\,f$.	
3.	Es sei $P(f\,\vert\,x_0,\ldots,x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Dann gilt $a_n = [x_0,\ldots,x_n]\,f$.	
4.	Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})$, $k = 1,\ldots,n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.	
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 4$. Berechne $P(f\vert x_0, x_1)(\frac{7}{4})$.	

Aufgabe: (Interpolation)
Gegeben Sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	2	4
f_i	-2	0	2	7

Bestimme das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom $P(f\vert x_0, x_1, x_2, x_3)$ 3. Grades

a) in der Lagrange-Basis $\{\ell_{03}, \ell_{13}, \ell_{23}, \ell_{33}\}$

b) in der monomialen Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$

c) in der Newtonschen Basis $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

d) Wie lautet das Newtonsche Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes

$$(x_4, f(x_4)) = (-2, -1)?$$