Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Normen, Taylor-Entwicklung, Kondition eines Problems

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Konzept

1. **Handouts** zur Vorlesung
   Erscheinen Freitags vor der Vorlesung
2. **Vorlesung**
   Grundlagen, Verfahren und kurze Beispiele
3. **Großübung**
   Vorrechenübungen, Verfahren werden ausführlich vorgeführt
4. **Kleingruppenübung**
   Eigenständiges Lösen (unter Anleitung) von Übungsaufgaben
5. **Hausübungen / Lerngruppen**
   Eigenständiges Lösen der Hausaufgaben (in Lerngruppen)
6. **Beratungstermine**
7. **Klausurvorbereitung**

Einstieg

Homepage: www.igpm.rwth-aachen.de/Numa/NumaET

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
Numerische Mathematik für E-Techniker WS 2019/20

Prof. Dr. Benjamin Berkels

Dr. Karl-Heinz Brakhage - Thomas Jankuhn - Christian Löbbert

Folien zur Vorlesung

Hinweise zur Anmeldung WS 2019/2020

Bonuspunkteprogramm WS 2019/2020

Informationen zur aktuellen Veranstaltung WS 2019/2020

Literatur

Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
(2. Auflage)

Wolfgang Dahmen und Arnold Reusken

Springer Verlag, ISBN 3-540-76492-2

1. Auflage: ISBN 3-540-25544-3

Minitests/Bonuspunkte

Bis zu acht Punkte der Klausur (10%) kann man durch Erfüllung der folgenden Bedingungen erreichen:

1. fristgerechte Anmeldung zu den Kleingruppen
2. maximal ein Fehltermin in der zugeteilten Gruppe

Punktvergabe bei den beiden Minitests:

Ab Minitestpunktezahl	*4*	*6*	*7*	*9*	*10*	*12*	*13*	*15*
Bonuspunkte	*0.5*	*1*	*1.5*	*2*	*2.5*	*3*	*3.5*	*4*

Anzahl der Punkte wird dann addiert und auf eine ganze Zahl gerundet.

Die Art der ***Minitests entspricht*** in etwa dem ***Verständnisfragen-Teil der Klausur.***

Inhaltsangabe

1. Einleitung
2. Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität
3. Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren
4. Lineare Ausgleichsrechnung
5. Nichtlineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren
6. Nichtlineare Ausgleichsrechnung
7. Berechnung von Eigenwerten
8. Interpolation
9. Splinefunktionen
10. Numerische Integration
11. Gewöhnliche Differentialgleichungen
12. Partielle Differentialgleichungen
13. Große dünnbesetzte lineare Gleichungssysteme
14. Numerische Simulationen: Vom Pendel bis zum Airbus

Ziele der Vorlesung

Für unterschiedliche Problemstellungen (Lösen eines linearen Gleichungssystems, Berechnung eines Integrals,....) werden folgende Themen behandelt:

1. Kondition (= Empfindlichkeit für Störungen) eines Problems
2. Wichtige numerische Lösungsverfahren
3. Stabilität (= Empfindlichkeit für Störungen) der Lösungsverfahren.
4. Effizienz (= Anzahl der Rechenoperationen [Speicherbedarf]) der Lösungsverfahren.

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 2.1

- Grundlagen: Normen und Taylor-Entwicklung
- Kondition eines Problems

Was Sie mitnehmen sollten:

- Grundbegriffe: Normen, Taylor-Entwicklung
- Was ist die (relative) Kondition eines Problems?
- Wie wird Kondition eines Problems berechnet?
- Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

Normierte Räume

Definition

Sei $\boldsymbol{V}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf $\boldsymbol{V}$, falls $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ gilt:

- $\|\boldsymbol{v}\| \geq \boldsymbol{0}$, und $\|\boldsymbol{v}\| = \boldsymbol{0}$ nur wenn $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.
- Für alle $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ gilt $\|\boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{v}\| = |\boldsymbol{\alpha}|\, \|\boldsymbol{v}\|$
- Für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ gilt die Dreiecksungleichung
$$\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$$

Wenn eine Norm auf $\boldsymbol{V}$ definiert ist, nennt man $\boldsymbol{V}$ oft einen linearen normierten Raum.

Vektornormen

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$ wird eine Norm definiert durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Speziell:

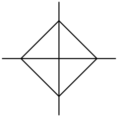
- 1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- ∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$
- 2-Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (Euklidische Norm)

  $\Rightarrow$ 2-Norm wird durch ein Skalarprodukt induziert.

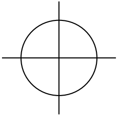
Vektornormen

Einheitskreise in $\mathbb{R}^2$: $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

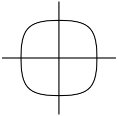
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$



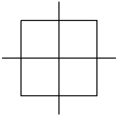
$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^T x}$$



$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty)$$



$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$$



Vektornormen

Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_{**}$ existieren beschränkte, positive Konstanten c und C, so dass

$$c\|v\|_* \leq \|v\|_{**} \leq C\|v\|_*, \quad \text{für alle } v \in V$$

Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

und

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

Matrixnorm

Definition

Sei $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine Norm auf V.
Dann nennt man die Norm auch Matrixnorm.

Beispiel: Die Frobenius-Norm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Matrixnormen

Definition und Satz

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, dann ist durch

$$\|\boldsymbol{A}\| := \sup_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{Ax}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=\boldsymbol{1}} \|\boldsymbol{Ax}\|$$

eine Matrixnorm definiert.

Diese nennt man induzierte Matrixnorm oder Operatornorm.

Beachte

Definition gilt entsprechend auch für $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$ und für lineare Abbildungen $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ zwischen normierten Vektorräumen. Hierbei ist $\|\boldsymbol{x}\|$ die Norm in $\boldsymbol{V}$, $\|\boldsymbol{Ax}\|$ die Norm in $\boldsymbol{W}$.

Matrixnormen

Definition und Satz

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, dann ist durch

$$\|\boldsymbol{A}\| := \sup_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=\boldsymbol{1}} \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$$

eine Matrixnorm definiert.
Diese nennt man induzierte Matrixnorm oder Operatornorm.

Für eine induzierte Matrixnorm gilt zusätzlich:

- $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{x}\|$
- $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \, \|\boldsymbol{B}\|$
- $\|\boldsymbol{I}\| = \boldsymbol{1}$

Matrixnormen

Aus der Definition ergeben sich folgende Formeln:

- 1-Norm: (max. Spaltensumme)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- ∞-Norm: (max. Zeilensumme)

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 2-Norm: (Spektralnorm)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} \leq \|A\|_F$$

wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Matrixnormen

Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich:

$\|A\|_F = \sqrt{15}, \quad \|A\|_1 = 4, \quad \|A\|_\infty = 5,$

$\|A\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(15 + 5\sqrt{5}\right)},$

denn die Eigenwerte von $A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ kann man über

$$\det(A^T A - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow (5 - \lambda)(10 - \lambda) - 25 = 0$$

bestimmen und damit

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(15 - 5\sqrt{5}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(15 + 5\sqrt{5}\right).$$

Landau-Symbol

Landau-Symbol $\mathcal{O}$

Betrachte zwei Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir verwenden die Notation

$$g(x) = \mathcal{O}\left(h(x)\right) \qquad (x \to x_0)$$

wenn es Konstanten $C > 0$ und $\delta > 0$ gibt, so dass gilt:

$$|g(x)| \leq C|h(x)|, \qquad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

- Anschauliche Bedeutung:
  g wächst nicht wesentlich schneller als h

  (in einer Umgebung von x_0)
- Definition gilt entsprechend auch für $g, h \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Taylor-Entwicklung: Skalare Funktionen

Taylor-Entwicklung (von f um x der Ordnung $k \in \mathbb{N}$)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(\tilde{x} - x)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}(\tilde{x} - x)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(\tilde{x} - x)^k, \end{aligned}$$

wobei ξ eine Zahl zwischen $\tilde{x}$ und x ist.

$f^{(n)}(x)$ ist die n-te Ableitung von f, z.B.,

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

Taylor-Entwicklung: Eindimensionale Funktionen

Taylor-Polynom vom Grad $k-1$ in x

$$\begin{aligned} p_{k-1}(\tilde{x}) &= f(x) + f'(x)(\tilde{x}-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(\tilde{x}-x)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}(\tilde{x}-x)^{k-1}. \end{aligned}$$

- Für $k=1$ erhält den Mittelwertsatz
$$\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} = f'(\xi),$$
wobei ξ eine Zahl zwischen $\tilde{x}$ und x ist.
- Oft verwendete Darstellung
$$f(\tilde{x}) = p_{k-1}(\tilde{x}) + \mathcal{O}(|\tilde{x}-x|^k) \qquad (\tilde{x} \to x)$$

Matlab-Demo

Taylor-Entwicklung: Mehrdimensionale Funktionen

Taylor-Entwicklung (von f um x)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} (\tilde{x}_j - x_j) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} (\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_j - x_j) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

- Gradient: $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$
- Hesse-Matrix: $f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$

Taylor-Entwicklung: Vektorwertige Funktionen

Kompakte Schreibweise

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\tilde{x} - x)^T f''(x)(\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

oder

$$f(\tilde{x}) = f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^2).$$

Falls $\|\tilde{x} - x\| \ll 1$:

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x)$$

$\doteq$: Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt.

Fehlerquellen

Fehler im Resultat auf Grund von

- Datenfehlern (oder Eingabefehlern)

  $\Rightarrow$ Kondition eines Problems

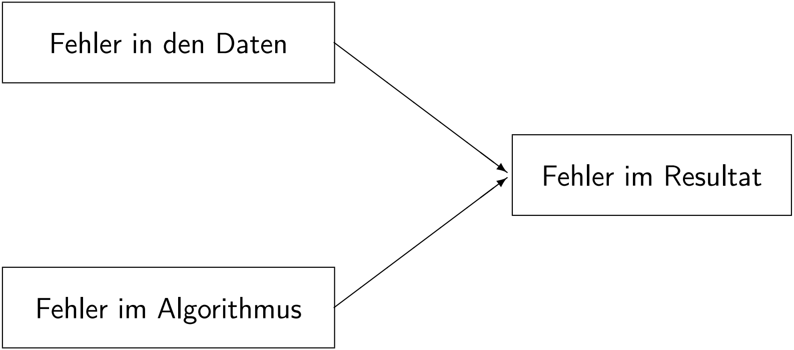
  – können häufig nicht vermieden werden

- Fehler(akkumulation) im Algorithmus (z.B. Rundungsfehler)

  $\Rightarrow$ Stabilität eines Algorithmus

  – kann man beeinflussen durch Anpassung des Verfahrens

Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität



Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

Konzept der Kondition eines Problems

Beachte: Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Wir fassen den "mathematischen Prozess" oder das "Problem" als Aufgabe auf, eine gegebene Funktion

$$f : X \to Y$$

an einer Stelle $x \in X$ auszuwerten.

Elementare Beispiele

- Die Berechnung der Multiplikation von x_1 und x_2:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.

- Die Berechnung der Summe von x_1 und x_2:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.

Elementare Beispiele

- Man bestimme die kleinere Nullstelle der Gleichung

$$y^2 - 2\,x_1\,y + x_2 = 0,$$

mit $x_1^2 > x_2$. Die Lösung y^* ist

$$y^* = f(x_1, x_2) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}.$$

mit

$$X = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 > x_2\right\},$$

$$Y = \mathbb{R}.$$

Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 = x_1\right\} \\
G_2 &= \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 = x_2\right\}
\end{aligned}
$$

wobei $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $a_{i,j}$ gegeben seien.

Mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$Ay = x.$$

Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden: (Fortsetzung)

Es gilt also

$$A \cdot y = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$$

Annahme: $\det A \neq 0$
Dann ist y durch

$$y = A^{-1}x$$

gegeben. Also Auswertung der Funktion

$$f(x) = A^{-1}x,$$

d.h. $X = Y = \mathbb{R}^2$.

Begriff der Kondition

Ungestörtes Problem

$$\underbrace{\boldsymbol{x}}_{\text{Eingabedaten}} \in \boldsymbol{X} \xrightarrow[\boldsymbol{f}]{\boxed{\text{Problem, Prozess}}} \underbrace{\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}_{\text{Ausgabedaten}} \in \boldsymbol{Y}$$

Gestörtes Problem

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x} \xrightarrow[\boldsymbol{f}]{\boxed{\text{Problem, Prozess}}} \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})$$

mit Eingabefehler $\boldsymbol{\Delta x} = \tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$

Ausgabefehler $\boldsymbol{\Delta y} = \tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Ziel: Verhältnis Ausgabefehler $\boldsymbol{\Delta y}$ zu Eingabefehler $\boldsymbol{\Delta x}$.

Begriff der Kondition

Absoluter/relativer Fehler:

- absoluter Eingabefehler: $\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}$
- absoluter Ausgabefehler: $\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}$
- relativer Eingabefehler: $\boldsymbol{\delta_x} = \dfrac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}}}$
- relativer Ausgabefehler: $\boldsymbol{\delta_y} = \dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{Y}}}$

Begriff der Kondition

Definition

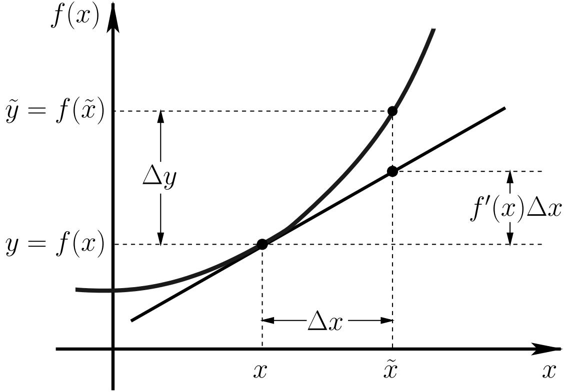
Mit der relativen Kondition eines (durch f beschriebenen) Problems bezeichnet man das Verhältnis

$$\frac{\delta_y}{\delta_x}$$

des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

- Absolute Kondition: Verhältnis $\frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X}$
- Mit Kondition wird meistens die relative Kondition gemeint.
- Ein Problem ist umso besser konditioniert, je kleinere Schranken für δ_y/δ_x (mit $\delta_x \to 0$) existieren.

Taylor-Entwicklung 1. Ordnung



Relative / absolute Kondition: Verhältnis $\dfrac{\delta_y}{\delta_x}$ bzw. $\dfrac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X}$.

Kondition: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Taylor-Entwicklung 1. Ordnung von f um x

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + f'(x) \cdot (\tilde{x} - x)$$

Daraus erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Skalar, Ausgabe: Skalar)

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \doteq \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \cdot \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

mit

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) := \left| f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} \right|.$$

Kondition: $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$

Für $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ lautet die Taylor-Reihenentwicklung 1. Ordnung

$$\boldsymbol{f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T \cdot (\tilde{x} - x)}$$

mit

$$\boldsymbol{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.}$$

Hieraus folgt

$$\boldsymbol{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)} \right) \cdot \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}.}$$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Mit den Verstärkungsfaktoren in Koordinate x_j.

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

erhält man

$$\underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\substack{\text{relativer Fehler} \\ \text{der Ausgabe}}} \doteq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\phi_j(x)}_{\substack{\text{Fehler-} \\ \text{verstärkung}}} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}}_{\substack{\text{relativer Fehler} \\ \text{der Eingabe in } x_j}}$$

Kondition $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Damit erhält man die Kondition für

- $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Skalar)

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \dot{\leq} \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}\right|$$

mit

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \kappa_{\mathrm{rel}}^{\infty}(x) := \max_j |\phi_j(x)|$$

und den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

wobei $\dot{\leq}$ entsprechend $\doteq$ zu verstehen ist.

Beispiel 2.12.

Gegeben sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Relative Konditionszahl:

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\,x^2.$$

$\rightsquigarrow$ für $|x|$ klein/groß ist f gut/schlecht konditioniert.

Beispiel

- $x = 0.1,\ \tilde{x} = 0.10001$: $\kappa_{\mathrm{rel}}(0.1) = 6 \cdot 10^{-2}$

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 6.03 \cdot 10^{-6}$$

- $x = 4,\ \tilde{x} = 4.0004$: $\kappa_{\mathrm{rel}}(4) = 96$

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 9.65 \cdot 10^{-3}$$

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $\boldsymbol{x = (x_1, x_2)^T}$, $\boldsymbol{f(x) = x_1 \cdot x_2}$

  $$\boldsymbol{\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = 1} \text{ (von } \boldsymbol{x} \text{ unabhängig!)}$$

  Multiplikation für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
  Ein ähnliches Resultat gilt für die Division.

- Addition: $\boldsymbol{x = (x_1, x_2)^T}$, $\boldsymbol{f(x) = x_1 + x_2}$

  $$\boldsymbol{\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \max\left\{\left|\frac{x_1}{x_1 + x_2}\right|, \left|\frac{x_2}{x_1 + x_2}\right|\right\}}$$

  Bei zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen: $\boldsymbol{\kappa_{\mathrm{rel}} \leq 1}$.

  ABER: $\boldsymbol{\kappa_{\mathrm{rel}}(x) \gg 1}$ wenn $\boldsymbol{x_1 \approx -x_2}$.

Bestimmung von $2\,\pi$

Beispiel: **(Auslöschung)**
Wir betrachten eine einfache Methode zur Approximation der irrationalen Zahl π.
Sei $a_0 := 3\sqrt{3}$ und

$$a_{k+1} := \sqrt{12 * 2^k * \left(6 * 2^k - \sqrt{(6 * 2^k)^2 - a_k^2}\right)}, \quad k \geq 0.$$

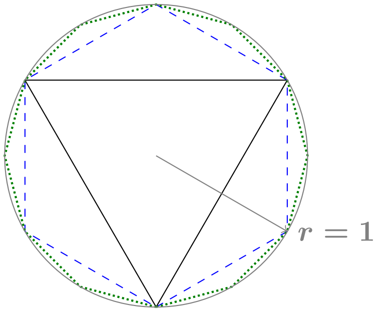
Man kann zeigen, dass a_k der Umfang des im Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen $3 \cdot 2^k$-Eckes ist. Deshalb konvergiert die Folge $(a_k)_{k \geq 0}$ monoton gegen 2π.
Sei $b_0 = a_0$ und

$$b_{k+1} = \sqrt{\frac{12 * 2^k * b_k^2}{6 * 2^k + \sqrt{(6 * 2^k)^2 - b_k^2}}}, \quad k \geq 0.$$

Mit Induktion zeigt man: $a_k = b_k$ für alle $k \geq 0$.

Bestimmung von 2π

Für $k = 0, 1, 2$ ergibt sich das folgende Bild:



Bestimmung von $2\,\pi$

Numerische Anwendung ergibt aber:

n	a_n	b_n
0	5,196152422706630	5,196152422706630
1	6.000000000000000	6.000000000000000
2	6.211657082460500	6.211657082460500
3	6.265257226562470	6.265257226562480
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	6.283115394650970	6.283185307178540
21	6.283348530043520	6.283185307179330
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
25	6.244997998398400	6.283185307179590
26	0.000000000000000	6.283185307179590
27	0.000000000000000	6.283185307179590

Beispiel 2.15. (Nullstelle)

Bestimmung der kleineren Lösung y^* von $y^2 - 2x_1 y + x_2 = 0$:

$$x = (x_1, x_2)^T, \qquad y^* = f(x) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}$$

- Partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} &= \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2} - x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} = \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}} \end{aligned}$$

- Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f(x)}$$

Beispiel 2.15. (Nullstelle)

- Verstärkungsfaktoren

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_1}{y^*} = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}} \cdot \frac{x_2}{y^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi_1(x) \end{aligned}$$

- Kondition: $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \max_j |\phi_j(x)|$

Kondition hängt stark von der Stelle (x_1, x_2) ab:

- Wenn $x_2 < 0$: $|\phi_1(x)| \leq 1$ und $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) \leq 1$
- Wenn $x_2 \approx x_1^2$: $|\phi_1(x)| \gg 1$ und $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) \gg 1$

Kondition: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{f}$ linear

Wir haben

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}$$

bzw. für gestörte Daten

$$\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

und damit

$$\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})$$

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f linear

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Vektor)

$$\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\kappa(A)} \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

wobei

$$\kappa(A) \equiv \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

die Konditionszahl der Matrix A bzgl. der Norm $\|\cdot\|$ ist.

Beispiel 2.28.

Die Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden

$$\begin{aligned} \mathbf{3}\,\boldsymbol{u_1} + \mathbf{1.001}\,\boldsymbol{u_2} &= \mathbf{1.999} \\ \mathbf{6}\,\boldsymbol{u_1} + \mathbf{1.997}\,\boldsymbol{u_2} &= \mathbf{4.003.} \end{aligned}$$

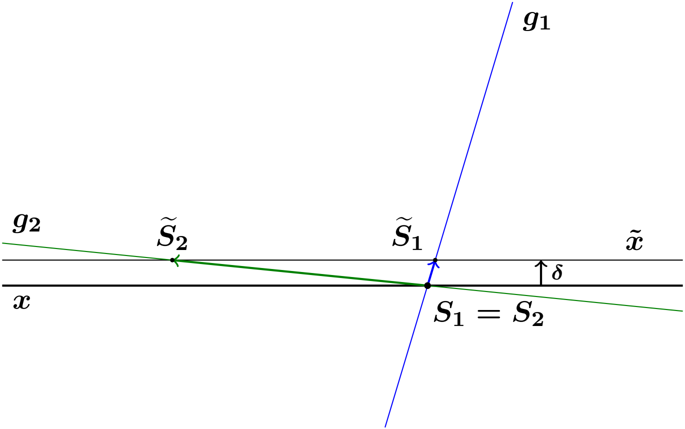
(fast parallel!) ergibt das Problem $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1.001} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.999} \\ \mathbf{4.003} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{\text{-}1} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.28. Kondition bei Bestimmung eines Schnittpunktes



Beispiel 2.28.

Effekt einer Störung in $\boldsymbol{b}$:

$$\tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2.002} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{A}^{-1}\tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Man erhält

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{u}} = \begin{pmatrix} 0.4004 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Maximumnorm:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Beispiel 2.28.

Es gilt

- Störung der Daten
$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} = \frac{\mathbf{3 \times 10^{-3}}}{\mathbf{4.003}} \approx \mathbf{7.5 \times 10^{-4}}$$
- Änderung des Resultats
$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}\|_\infty}{\|\boldsymbol{u}\|_\infty} = \frac{\mathbf{1.8}}{\mathbf{1}} = \mathbf{1.8}$$

Schlechte Kondition wird quantifiziert durch

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty \, \|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = \mathbf{4798.2.}$$

Zusammenfassung

Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungsweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Frage:

- Was ist die (relative) Kondition eines Problems?

$\Rightarrow$ Die relative Kondition eines Problems bezeichnet das Verhältnis des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

Zusammenfassung

Wie wird die Kondition analysiert?

- Wir haben folgende Fälle betrachtet
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, f linear

Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

- Multiplikation und Division sind für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
- Addition ist
  - gut konditioniert, wenn beide Zahlen das gleiche Vorzeichen haben;
  - sehr schlecht konditioniert, wenn $x_1 \approx -x_2$.

Verständnisfragen

f Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur numerischen Lösung des Problems.

f Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.

w Die Funktion $f(x) = x \ln(x)$ ist schlecht konditioniert für alle x mit $|x| \approx 1$.

Sei $\kappa_{\mathrm{rel}}(x)$ die Kondition der Funktion $f(x) = x^3 \ln(x)$. Berechnen Sie $\lim_{x \to \infty} \kappa_{\mathrm{rel}}(x)$. **3**