

Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Lineare Gleichungssysteme II

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung letzte Vorlesung

Satz 3.9.

Sie $x + \Delta x$ die Lösung von $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$.
Dann gilt falls $\kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

wobei

$$\kappa_{\|\cdot\|}(A) \equiv \|A^{-1}\| \|A\|$$

die (relative) **Konditionszahl der Matrix A** (bzgl. $\|\cdot\|$) ist.

Der Fehler ist proportional zum Residuum $\tilde{r} = b - A \tilde{x}$

$$\kappa(A)^{-1} \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\tilde{r}\|}{\|b\|}$$

Zusammenfassung letzte Vorlesung

Rechenaufwand (Multiplikationen) zur Bestimmung von

- ▶ Skalarprodukt $x^T y$: n
- ▶ Dyadisches Produkt $x y^T$: n^2
- ▶ Matrix-Vektor Produkt $A x$: n^2
- ▶ Matrix-Matrix Produkt $A B$: n^3



Definition

Eine Matrix $R = (r_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **obere Dreiecksmatrix**, falls

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{für } i > j \quad \text{gilt.}$$

Rechenaufwand Rückwärtseinsetzen (Multiplikationen)

Die Lösung von $Rx = b$ benötigt ca. $\frac{1}{2}n^2$ Operationen

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 3.5-3.6

- ▶ Gauß-Elimination und LR-Zerlegung
- ▶ Cholesky-Zerlegung

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie funktioniert die LR-Zerlegung?
- ▶ Warum benötigt man Pivotisierung?
- ▶ Was ist die Cholesky-Zerlegung?

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\det A \neq 0$) und $b \in \mathbb{R}^n$, bestimme $x \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$A x = b.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von A , so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Verfahren: $A=LR$ $Ly=b \Rightarrow Rx=y \Rightarrow Ax=LRx=b$

- ▶ LR-Zerlegung: $PA = LR$, wobei L untere Dreiecksmatrix, R obere Dreiecksmatrix
- ▶ Cholesky-Zerlegung: $A = LDL^T$, wobei D Diagonalmatrix
- ▶ QR-Zerlegung: $A = QR$, wobei Q orthogonale Matrix

Gauß-Elimination: LR-Zerlegung

Die bekannteste Methode, das System

$$Ax = b \quad (\det A \neq 0)$$

auf Dreiecksgestalt zu bringen, ist die **Gauß-Elimination**.

$$A = A^{(1)}$$

⊗	*	...	...	*
*	*	...	...	*
⋮	⋮			⋮
⋮	⋮			⋮
*	*	...	...	*

$$A^{(2)}$$

*	*	...	...	*
0	⊗	...	...	*
⋮	⋮	$\tilde{A}^{(2)}$		⋮
⋮	⋮			⋮
0	*	...	...	*

$$A^{(3)}$$

*	*	*	...	*
0	*	*	...	*
0	0	⊗	...	*
⋮	⋮	⋮	$\tilde{A}^{(3)}$	⋮
0	0	*	...	*

- ▶ Einträge der Matrix $A^{(k)}$ werden mit $a_{i,j}^{(k)}$ notiert.
- ▶ Der Eintrag $a_{j,j}^{(j)}$ (⊗ oben) heißt **Pivotelement**.
- ▶ In entsprechender Weise ist auch die rechte Seite b umzuformen.

Beispiel 3.19.

Löse das Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Gauß-Elimination.

Wir benutzen die folgende Notation

$$\rightarrow (A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array} \right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,1} \times \text{Zeile } 1)$ von Zeile i
 $j = 1$

$$\ell_{2,1} = \frac{4}{2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \textcolor{red}{2} & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ \textcolor{blue}{6} & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \textcolor{red}{\ell_{2,1}} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} A //$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,1} \times \text{Zeile } 1)$ von Zeile i
 $j = 1$

$$\begin{aligned} \ell_{2,1} &= \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} &= \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} &= \frac{-2}{2} \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\ell_{2,1} & 1 & & \\ -\ell_{3,1} & & 1 & \\ -\ell_{4,1} & & & 1 \end{pmatrix} A //$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,1} \times \text{Zeile } 1)$ von Zeile i
 $j = 1$

$$\begin{aligned} \ell_{2,1} &= \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} &= \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} &= \frac{-2}{2} \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array} \right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,2} \times \text{Zeile } 2)$ von Zeile i
 $j = 2$

$$\begin{aligned} \ell_{3,2} &= \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} &= \frac{-6}{2} \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{array} \right)$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,3} \times \text{Zeile } 3)$ von Zeile i

$$j = 3$$

$$\ell_{4,3} = \frac{10}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array} \right) = (R | c)$$

Wegen $Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$ liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(-\frac{9}{2}, \quad 2, -3, \quad 1 \right)^T.$$

Gauß-Elimination ohne Pivotisierung

- Bestimme $(A | b) \rightarrow (R | c)$
- Löse $Rx = c$

Beispiel 3.22.

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 L_2 L_1, A = R$$

$$\Rightarrow A = L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1} R$$

gilt

$$A = L R,$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}$$

die bei der Gauß-Elimination berechneten Dreiecksmatrizen sind.

Zusammenfassung

Ein bemerkenswertes “Nebenprodukt” der Gauß-Elimination ist also eine **Faktorisierung** von A in ein Produkt einer normierten unteren Dreiecksmatrix L und oberen Dreiecksmatrix R .

Satz 3.21.

Sind im Gauß-Algorithmus **stets alle Pivotelemente ungleich null**, dann erhält man

$$A = L R,$$

wobei R eine obere Dreiecksmatrix und L eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

Frage:

- ▶ Was passiert, wenn das Pivotelement identisch null ist?
- ▶ Was passiert, wenn das Pivotelement “sehr klein” ist?

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet **nicht**, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Ax = b \Leftrightarrow x_1 = b_2 \quad x_2 = b_1$$

$\nexists LR$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- ▶ Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet **nicht**, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- ▶ Bei verschwindendem Pivotelement ist das Vertauschen von Zeilen notwendig.

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{L}{I} \cdot \underset{R}{I}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- ▶ Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet **nicht**, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- ▶ Bei verschwindendem Pivotelement ist das Vertauschen von Zeilen notwendig.
- ▶ Selbst wenn das Pivotelement ungleich null, ist eine Vertauschung von Zeilen angebracht, um die Stabilität der Gauß-Elimination (bzw. LR-Zerlegung) zu verbessern.
- ▶ Als Pivotelement wählt man das **betragsgrößte** Element der jeweiligen Spalte.
- ▶ Da man das j -te Pivotelement in der j -ten Spalte sucht, nennt man diesen Vertauschungsvorgang **Spaltenpivotisierung**. Die Matrix sollte zuvor äquilibriert werden.

Beispiel 3.23.

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Mit $l_{2,1} = 1/0.00031$ ergibt die Gauß-Elimination

$$(R | c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & 1 - \frac{1}{0.00031} & -7 - \frac{-3}{0.00031} \end{array} \right),$$

und bei 4-stelliger Rechnung schließlich

$$(R | c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & -3225 & 9670 \end{array} \right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert dann ...

Beispiel 3.23.

$$\tilde{x}_1 \approx -6.452, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.998.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.001240 \dots, \quad x_2 = -2.998759 \dots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Dieses Ergebnis ist *unakzeptabel*, weil die Kondition des Problems sehr gut ist: $\kappa_\infty(A) = 4.00$.

Nach **Spaltenpivotisierung** mit 4-stelliger Rechnung erhält man

$$(R | c) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0.9997 & -2.998 \end{array} \right)$$

und damit

$$\tilde{x}_1 \approx -4.001, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.999,$$

also völlig akzeptable Werte.

Permutationsmatrix

Sei $P_{i,j}$ die elementare Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i -ten und j -ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Beispiel

Für $n = 4$, $i = 2$, $j = 4$ erhält man

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die folgenden Resultate

$$\det P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ -1 & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

und

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}.$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$P_{2,3} A$

$$P_{2,3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{i,j} A = \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix}_{i,j}$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A P_{2,3} \quad (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_3 \ x_2)$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

$$P_{2,3} A P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der Einträge } a \text{ und } b$$

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung

Gauß-Elimination **mit** Spaltenpivotisierung ist für **jede** nicht-singuläre Matrix durchführbar und es gilt folgende Verallgemeinerung von Satz 3.21.

Satz 3.25.

Zu jeder nichtsingulären Matrix A existiert eine Permutationsmatrix P , eine (dazu) eindeutige untere normierte Dreiecksmatrix L , deren Einträge sämtlich betragsmäßig durch 1 beschränkt sind, und eine eindeutige obere Dreiecksmatrix R , so dass

$$PA = LR.$$

Die Matrizen P , L und R ergeben sich aus der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung.

Durchführung der LR-Zerlegung

Skalierung und Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- ▶ Bestimme die Diagonalmatrix

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n),$$

so dass $D A$ zeilenweise äquilibriert ist, d.h.

$$d_i = \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

- ▶ Wende Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung auf $D A$ an.

Aufwand

- ▶ Zeilensummenberechnung: $n(n - 1)$ Additionen;
- ▶ Berechnung der Skalierung: n Divisionen, n^2 Multiplikationen;
- ▶ Für $j = 1, 2, \dots, n - 1$ Berechnung der neuen Einträge
 - ▶ in L : $(n - j)$ Divisionen
 - ▶ in R : $(n - j)^2$ Multiplikationen | Additionen

Dominierender Aufwand: $\sum_{j=1}^{n-1} (n - j)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim n^3/3.$

Rechenaufwand 3.29.

LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung kostet ca.

$$\frac{1}{3}n^3 \text{ Operationen.}$$

Die Skalierung (falls nötig) kostet nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

Beispiel 3.30.

Zeilenäquilibrierung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.30.

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow[\text{Vertauschung}]{P_{1,3}}$$

$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	0

$$DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.30.

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2. Schritt:

$$\begin{matrix} P_{23} \\ \text{Vertauschung} \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Beispiel 3.30.

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Ergebnis: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Beispiel 3.30.

Man rechnet einfach nach, dass

$$L R = P D A$$

gilt, wobei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix P ist das Produkt von $P_{2,3}$ und $P_{1,3}$.

Merke

- ▶ Skalierung/Äquilibrierung verbessert die “*Konditionszahl der Matrix*”.
- ▶ Pivotisierung verbessert die *Stabilität* der Gauß-Elimination/*LR*-Zerlegung.

Anwendungen der LR-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die schon zeilenweise äquilibriert ist.
Sei für diese Matrix die LR-Zerlegung $PA = LR$ bekannt.

1. Lösen eines Gleichungssystems

Die Lösung von

$$Ax = b$$

1. Löse $Ly = Pb$
2. Löse $Rx = y$

ergibt sich über die Lösung zweier Dreieckssysteme

$$Ax = b \iff PAx = Pb \iff L \underbrace{Rx}_{=y} = Pb$$

$$PAx = LRx = Ly = Pb$$

- ▶ Bestimme y durch Vorwärtseinsetzen aus $Ly = Pb$.
- ▶ Berechne x aus $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen x^k des linearen Gleichungssystems

$$A x^k = b^k, \quad k = 1, \dots, K,$$

wobei A eine konstante Matrix ist und b^k , $k = 1, \dots, K$, verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

$$\begin{aligned}
 & u = u(x, t) \\
 & \partial_t u = \partial_{xx} u \leadsto \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \partial_{xx}^h u^k \\
 & \leadsto u^{k+1} = u^k + \tau \partial_{xx}^h u^k \\
 & \quad = (I + \tau \partial_{xx}^h) u^k
 \end{aligned}$$

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen x^k des linearen Gleichungssystems

$$A x^k = b^k, \quad k = 1, \dots, K,$$

wobei A eine konstante Matrix ist und b^k , $k = 1, \dots, K$, verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Vorgehen

- ▶ Bestimme (einmalig) LR-Zerlegung von A , d.h.

$$P A = L R$$

- ▶ Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für jede rechte Seite

$$\begin{aligned} L y^k &= P b^k \\ R x^k &= y^k \end{aligned}$$

Aufwand: $\frac{1}{3}n^3 + Kn^2$ (vs. $K\frac{1}{3}n^3$ ohne LR-Zerlegung)

Anwendungen der LR-Zerlegung

3. Berechnung der Inversen

Sei $x^i \in \mathbb{R}^n$ die i -te Spalte der Inversen von A :

$$A^{-1} = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n).$$

Aus $AA^{-1} = I$ folgt

$$Ax^i = e^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zur Berechnung der Inversen bietet sich folgende Strategie an:

- ▶ Bestimme die LR-Zerlegung $PA = LR$ über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung,
- ▶ Löse die Gleichungssysteme

$$LRx^i = Pe^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Gesamtaufwand: etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

4. Berechnung von Determinanten

$$\det(A B) = \det(A) \det(B)$$

Aus $P A = L R$ folgt

$$\det P \det A = \det L \det R = \det R.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det P &= \det P_{n,r_n} \cdots \det P_{n-1,r_{n-1}} \\ &= (-1)^{\# \text{Zeilenvertauschungen}}, \end{aligned}$$

folgt

$$\det A = (-1)^{\# \text{Zeilenvertauschungen}} \prod_{j=1}^n r_{j,j}.$$

Symmetrisch positiv definite Matrix

Definition 3.31.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **symmetrisch positiv definit** (s.p.d.), falls

$$A^T = A \quad (\text{Symmetrie})$$

und

$$x^T A x > 0 \quad (\text{positiv definit})$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, gilt.

Tritt bei vielen (physikalischen) Problemen auf:

- ▶ Netzwerke mit passiven Komponenten
- ▶ Diffusions-/Wärmeleitungsgleichung
- ▶ Normalengleichung (Lineare Ausgleichsrechnung)
- ▶ ...

Beispiel 3.32.

1. $A = I$ (Identität) ist symmetrisch positiv definit.

Die Symmetrie ist trivial und

$$\sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$x^T I x = x^T x = \|x\|_2^2 > 0,$$

falls $x \neq 0$.

Beispiel 3.32.

1. $A = I$ (Identität) ist symmetrisch positiv definit.

Die Symmetrie ist trivial und

$$x^T I x = x^T x = \|x\|_2^2 > 0,$$

falls $x \neq 0$.

2. Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, und B habe vollen Rang.

Dann ist

$$A := B^T B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

s.p.d., denn: Symmetrie $A^T = (B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B = A$

$$x^T A x = x^T B^T B x = (B x)^T B x = \|B x\|_2^2 \geq 0$$

$$\|B x\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow B x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow x^T A x > 0 \text{ für } x \neq 0$$

B voller Rang.

Beispiel 3.32.

1. $A = I$ (Identität) ist symmetrisch positiv definit.

Die Symmetrie ist trivial und

$$x^T I x = x^T x = \|x\|_2^2 > 0,$$

falls $x \neq 0$.

2. Sei $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, und B habe vollen Rang.

Dann ist

$$A := B^T B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

s.p.d., denn:

$$A^T = (B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B = A.$$

Beispiel 3.32.

2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Dann gilt

$$x^T A x = x^T B^T B x = (Bx)^T (Bx) = \|Bx\|_2^2 \geq 0.$$

Es gilt

$$x^T A x = \|Bx\|_2^2 = 0$$

nur falls

$$Bx = 0$$

gilt. Da B vollen Rang hat, muss daher

$$x = 0$$

sein.

Satz 3.33.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei s.p.d. Dann gelten folgende Aussagen:

- ▶ A ist invertierbar, und A^{-1} ist s.p.d.
- ▶ A hat nur strikt positive (insbesondere reelle) Eigenwerte.
- ▶ A hat nur strikt positive Diagonaleinträge und der betragsgrößte Eintrag von A liegt auf der Diagonalen.
- ▶ Bei Gauß-Elimination ohne Pivotisierung sind alle Pivotelemente strikt positiv.

Beachte:

Bei s.p.d. Matrizen ist die Gauß-Elimination ohne Pivotisierung durchführbar $\Rightarrow$ "Symmetrische" LR-Zerlegung

Satz 3.34.

Satz 3.34.

Jede s.p.d. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$A = LDL^T,$$

wobei L eine normierte untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen

$$d_{i,i} > 0, i = 1, \dots, n,$$

ist. Umgekehrt ist jede Matrix der Form LDL^T , wobei D eine Diagonalmatrix ist, die $d_{i,i} > 0$ erfüllt, und L eine normierte untere Dreiecksmatrix ist, symmetrisch positiv definit.

Definition

Die obige Zerlegung $A = LDL^T$ heißt *Choleskey-Zerlegung*.

Zusammenfassung

- ▶ Dreiecksmatrizen ergeben leicht lösbare Systeme:
Aufwand ca. $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.
- ▶ Zeilenskalierung vs. Pivotisierung
 - ▶ **Skalierung/Äquilibrierung** verbessert die “*Konditionszahl der Matrix*”. (sogenannte Vorkonditionierung)
 - ▶ **Pivotisierung** verbessert die **Stabilität** der Gauß-Elimination/
LR-Zerlegung.
- ▶ LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung:
stabile und effiziente Methode, Aufwand $\sim \frac{1}{3}n^3$
- ▶ A s.p.d. $\Leftrightarrow$ es existiert eine Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$.

Verständnisfragen

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

- f** Es sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $Ry = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $n^3/3$ Operationen.
- w** Es existieren stets eine Permutationsmatrix P , eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R , so dass $PA = LR$ gilt.
- w** Sei $PA = LR$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det A = \det R$ oder $\det A = -\det R$.

Verständnisfragen

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

W Ohne Pivotisierung ist die Gauß-Elimination nicht für jedes A durchführbar.

Es seien $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\|D\|_2$.

$$\lambda_{\max}(D^T D) = 1/4$$

$$D = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$D^T D = \begin{pmatrix} 1/64 & 1/25 & 1/16 \end{pmatrix}$$

Verständnisfragen

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

W Ohne Pivotisierung ist die Gauß-Elimination nicht für jedes A durchführbar.

Es seien $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\|D\|_2$. **0.25**