

Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Singulärwertzerlegung/Nichtlineare Gleichungssysteme I

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Definition

Zu gegebenen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$, für dass

$$\|A x^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A x - b\|_2$$

gilt. Diese Problemstellung heißt das **lineare Ausgleichsproblem**.

Normalgleichungen:

$$A^T A x = A^T b$$

Satz 4.5.

$x^* \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des linearen Ausgleichsproblems, wenn x^* Lösung der Normalgleichungen ist.

Das System der Normalgleichungen hat stets mindestens eine Lösung. Sie ist genau dann **eindeutig**, wenn $\text{Rang}(A) = n$ gilt.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Lösung x^* über QR-Zerlegung

- ▶ Bestimme die QR -Zerlegung von A

$$QA = R = \begin{pmatrix} \square \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} m - n \end{matrix} \quad (\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}),$$

und berechne $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ aus

$$Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

- ▶ Löse $\tilde{R}x^* = b_1$ mittels Rückwärtseinsetzen.
- ▶ Die Norm des Residuums $\|Ax^* - b\|_2$ ist $\|b_2\|_2$.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Kondition des linearen Ausgleichsproblems

Für Störungen in b gilt:
$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos \Theta} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}.$$

wobei

$$\cos \Theta = \frac{\langle A x^*, b \rangle}{\|A x^*\|_2 \|b\|_2} \stackrel{b - Ax^* \perp Ax^*}{=} \frac{\|A x^*\|_2}{\|b\|_2}$$

Problem schlecht konditioniert für $\Theta \approx \frac{\pi}{2}$ oder $\kappa_2(A) \gg 1$.

Stabilität der Lösungsverfahren

- ▶ Die Lösung der Normalgleichung über die Cholesky-Zerlegung von $A^T A$ ist instabil selbst für $\Theta \approx 0$ falls $\kappa_2(A)^2$ der Ordnung eps^{-1} ist (Grund $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$).
- ▶ Die Lösung über die QR -Zerlegung ist stabil.

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 4.1-4.4,4.7,5.1-5.2

- ▶ Singulärwertzerlegung (SVD)

Kapitel 5: Nichtlineare Gleichungssysteme

- ▶ Einleitung: Problemstellung

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Definition, Eigenschaften und Anwendungen der SVD

Motivation

Lösung des linearen Ausgleichsproblems (für $\text{Rang}(A) = n$):

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Problem: – $(A^T A)^{-1}$ existiert nicht für $\text{Rang}(A) < n$
– Lösung des linearen Ausgleichsproblems nicht eindeutig
⇒ zusätzliche Auswahlbedingung

Allgemeines Lineares Ausgleichsproblem

Für $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat die Aufgabe

Bestimme x^* mit *minimaler Euklidischer Norm*, für das
 $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ gilt

eine *eindeutige* Lösung. Diese kann bestimmt werden mittels

- ▶ *QR*-Zerlegung mit Pivotisierung
- ▶ Singulärwertzerlegung (SVD = Singular Value Decomposition)

Singulärwertzerlegung

Satz 4.27.

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix

$$\Sigma := \text{diag}_{mn}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad p = \min(m, n),$$

mit

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0,$$

so dass

$$A = U \Sigma V^T.$$

Hierbei heißen:

- ▶ Singulärwerte von A : σ_i , $i = 1, \dots, p$
- ▶ Linkssingulärvektoren : Spalten von $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_m]$
- ▶ Rechtssingulärvektoren: Spalten von $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$

Singulärwertzerlegung – Geometrische Interpretation

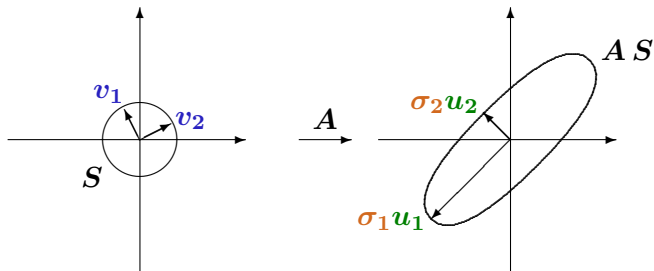
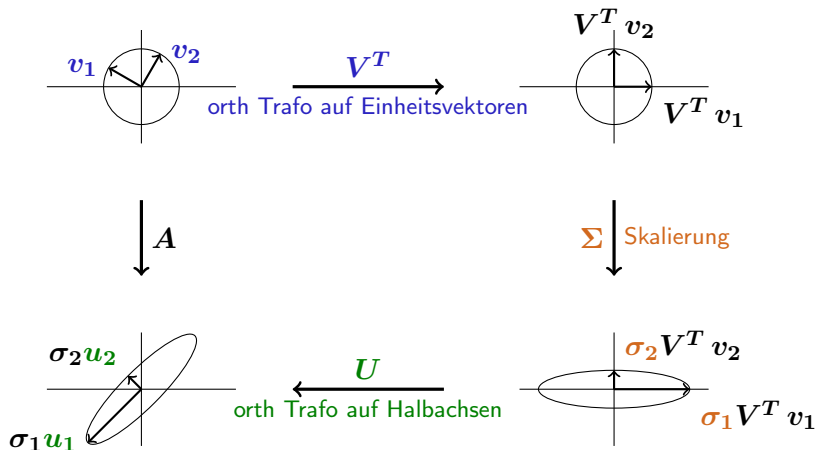


Abbildung der Einheitskugel $S = \{x : \|x\|_2 = 1\}$ durch $A = U\Sigma V^T$

- ▶ **Singulärwerte:** Längen σ_1, σ_2 der Halbachsen von AS .
- ▶ **Linkssingulärvektoren:** Einheitsvektoren $\{u_1, u_2\}$ in Richtung der Halbachsen von AS
- ▶ **Rechtssingulärvektoren:** Einheitsvektoren $\{v_1, v_2\} \in S$, Urbild der Halbachsen von AS , so dass $Av_j = \sigma_j u_j$.

Singularwertzerlegung – Geometrische Interpretation



Singularwertzerlegung

Fall: $m = 4$, $n = 2$, $\text{Rang}(A) = 2$

- (Volle) SVD: $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad U \qquad \qquad \Sigma \qquad \qquad V^T$

- Reduzierte SVD $m \geq n$: $\hat{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

$A \qquad \qquad \hat{U} \qquad \qquad \hat{\Sigma} \qquad \qquad V^T$

Singulärwertzerlegung

- **Annahme:** $m \geq n$

Falls $m < n$, betrachte SVD von A^T

$$A^T = U \Sigma V^T \Rightarrow A = V \Sigma^T U^T$$

- Singulärwerte sind **reell** und **nichtnegativ**
- Konvention
 - $\sigma_{\max} = \sigma_1$ größter Singulärwert
 - $\sigma_{\min} = \sigma_n$ kleinster Singulärwert
 - der Größe nach geordnet

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

- SVD ist numerisch **rückwärtsstabil** berechenbar

$$A + \Delta A = \tilde{U} \tilde{\Sigma} \tilde{V}^T \quad \text{mit} \quad \|\Delta A\|_2 = \mathcal{O}(\text{eps})$$

Eigenschaften

Sei $A = U \Sigma V^T$ eine Singularwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singularwerten

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Dann gilt:

- ▶ für $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} A v_i &= \sigma_i u_i, \\ A^T u_i &= \sigma_i v_i, \end{aligned}$$

- ▶ Der **Rang** A ist die Anzahl der von Null verschiedenen Singularwerte.

$$\text{Rang}(A) = r$$

Eigenschaften

Sei $A = U \Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singulärwerten

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Dann gilt:

- ▶ $\|A\|_2 = \sigma_1 = \sigma_{\max}$
- ▶ $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n} = \frac{1}{\sigma_{\min}},$
falls A eine reguläre $n \times n$ Matrix ist
- ▶ $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_n},$
falls A eine reguläre $n \times n$ Matrix ist
- ▶ $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^+\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_r} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}},$
falls $\text{Rang}(A) = n$. Hier ist A^+ die **Pseudoinverse**.

Eigenschaften

Sei $A = U \Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singulärwerten

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Dann gilt:

- Die Pseudoinverse $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist definiert durch

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

$$\text{mit } \Sigma^+ = \text{diag}_{nm}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Es gilt

$$AA^+ = U \Sigma \Sigma^+ U^T = U \underbrace{\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{r \text{ mal}} U^T \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

$$A^+A = V \Sigma^+ \Sigma V^T = V \underbrace{\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{r \text{ mal}} V^T \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Eigenschaften

Sei $A = U \Sigma V^T$ eine Singularwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singularwerten

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Dann gilt:

- ▶ Die strikt positiven Singularwerte sind die Wurzeln der strikt positiven Eigenwerte von $A^T A$:

$$\{\sigma_i \mid i = 1, \dots, r\} = \left\{ \sqrt{\lambda_i(A^T A)} \mid i = 1, \dots, r \right\}$$

- ▶ Die Singularwerte sind gleich dem Absolutbetrag der Eigenwerte von A , falls $A = A^T$.
- ▶ Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^n \sigma_i$$

Eigenschaften – Niedrigrang-Approximation

Sei $A = U \Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
mit $r = \text{Rang}(A)$ und Singulärwerten

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0.$$

Für $k \leq r$ definiere $A_k = U \Sigma_k V^T$

mit $\Sigma_k = \text{diag}_{mn}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Dann gilt:

- ▶ $\text{Rang}(A_k) = k$.
- ▶ Die Distanz zwischen A_k und A ist

$$\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

- ▶ A_k ist die beste Approximation an A vom Rang $\leq k$

$$\|A - A_k\|_2 = \min_{\text{Rang}(B) \leq k} \|A - B\|_2.$$

Lineares Ausgleichsproblem

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{Rang}(A) = n$ bestimme x^* , so dass

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A x - b\|_2.$$

Lösung mittels SVD: $A = U \Sigma V^T$

$$\begin{aligned} \|A x - b\|_2 &= \|U^T A (V V^T) x - U^T b\|_2 \\ &= \|\Sigma (V^T x) - (U^T b)\|_2 \\ &= \|\Sigma y - (U^T b)\|_2 \end{aligned}$$

Dann ist $x^* = V y$ mit $y = \Sigma^+ (U^T b)$ die eindeutige Lösung.

$$\Rightarrow x^* = V \Sigma^+ (U^T b) = A^+ b$$

Dies gilt auch falls $\text{Rang}(A) < n$.

Lineares Ausgleichsproblem

Falls $\text{Rang}(A) = r < n$, ist die Pseudoinverse $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T$$

mit

$$\Sigma^+ = \text{diag}_{nm}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Lösung des **allgemeinen linearen Ausgleichsproblems**:

$$x^* = A^+ b.$$

Numerischer Rang

Der Rang einer Matrix wird in der Praxis fast immer über die Singulärwerte bestimmt. Falls

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$$

so gilt $\text{Rang}(A) = r$.

Problem: Rundungsfehler aufgrund der Maschinengenauigkeit

$$A \rightarrow \tilde{A}, \quad \sigma_i \rightarrow \tilde{\sigma}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

$\Rightarrow \text{Rang}(\tilde{A})$ häufig $> r$, Abfrage " $\sigma_k = 0$ " nicht sinnvoll.

Numerischer Rang

Der **numerische Rang** der Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert als

$$\text{Rang}_{\text{num}}(\tilde{A}) = \min\{1 \leq k \leq n \mid \tilde{\sigma}_{k+1} \leq \tilde{\sigma}_1 \sqrt{mn} \text{ eps}\}.$$

Bildkomprimierung

Singulärwertzerlegung von A

$$A = U \Sigma V^T$$

kann geschrieben werden als

$$A = \sum_{i=1}^p \sigma_i u_i v_i^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_p u_p v_p^T$$

mit $p = \min(m, n)$.

Niedrigrang-Approximation der Matrix A vom Rang k mit $k \leq p$, ist

$$A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$$

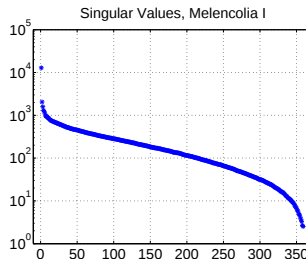
und $\|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}$.

(Verlustbehaftete) Datenkompression:

$\Rightarrow$ Speicherbedarf für A_k ist $k(m + n + 1)$ vs. mn für A .

Bildkomprimierung

Betrachte Schwarz-Weiß-Bild $B(x, y)$ als Matrix A :
Einträge entsprechen Graustufen des jeweiligen Pixels.

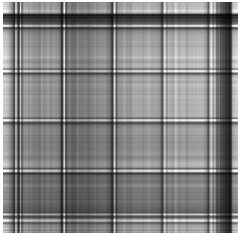


Je nach Anwendung:

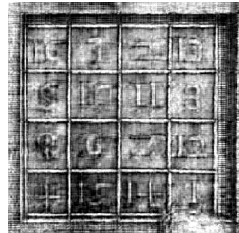
- ▶ Principal Component Analysis (PCA),
- ▶ Proper Orthogonal Decomposition (POD),
- ▶ Karhunen-Loève Decomposition.

Bildkomprimierung

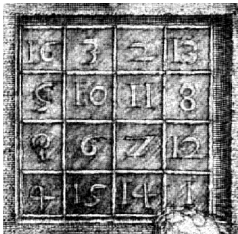
$k = 1$, compression = 0.00548



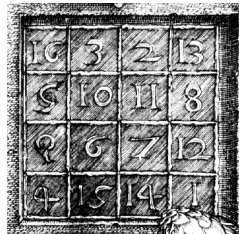
$k = 20$, compression = 0.11



$k = 40$, compression = 0.219



Original: A. Duerer, Melencolia I



Zusammenfassung

Singulärwertzerlegung wird eingesetzt für

- ▶ Bestimmung des (numerischen) Rangs einer Matrix
- ▶ Berechnung von Norm und Konditionszahl
- ▶ Niedrigrang-Approximation

Viele Praktische Anwendungen:

- ▶ Signalverarbeitung
- ▶ Bildverarbeitung
- ▶ Statistische Auswertungen
- ▶ Modelordnungsreduktion
- ▶ Inverse Probleme
- ▶ Regularisierung schlecht gestellter Probleme

Verständnisfragen

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ betrachten wir das lineare Ausgleichsproblem:
Bestimme x^* mit minimaler 2-Norm so, dass
 $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.

f Es seien σ_1 der größte und σ_r der kleinste (positive) Singulärwert von A . Dann gilt: $\|A\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$.

w Die Lösung x^* des linearen Ausgleichsproblem mit minimaler 2-Norm ist immer eindeutig.

Es sei $A = U \Sigma V^T$ mit $U = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ und

$\Sigma = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine Singulärwertzerlegung von A und es sei

$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x_1^* . **0.018**

Matrix-Zerlegungen

A reguläre quadratische Matrizen

- ▶ **LR**-Zerlegung (Gauß-Elimination)

$$\square = \triangle \cdot \nabla$$

- ▶ Falls **A** s.p.d.: Cholesky $\mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^T$

$$\square = \triangle \cdot \diagup \cdot \nabla$$

A beliebig (nicht notwendig quadratisch oder voller Rang)

- ▶ **QR**-Zerlegung (Givens-Rotation, Householder-Spiegelung)

$$\square = \square \cdot \nabla$$

- ▶ Singularwert-Zerlegung

$$\square = \square \cdot \diagup \cdot \square$$

Nichtlineare Gleichungssysteme

Kapitel 5:

Nichtlineare Gleichungssysteme

Motivation

1. Viele praktische Probleme führen auf **nichtlineare** Gleichungssysteme
2. Je realistischer ein (mathematisches) Modell, desto eher ist es nichtlinear:

- ▶ Pendelschwingung: Auslenkungswinkel φ beschrieben durch

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0 \quad \text{vs.} \quad \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0$$

für kleine vs. große Auslenkungen.

- ▶ Lineare vs. nichtlineare Diffusion: Temperatur u löst

$$u_t = \operatorname{div}(k \nabla u) \quad \text{vs.} \quad u_t = \operatorname{div}(k(u) \nabla u)$$

mit Wärmeleitfähigkeit $k(u) = c_1 + c_2 u + c_3 u^3$.

- ▶ Strömungsprobleme, Netzwerkanalyse, ...

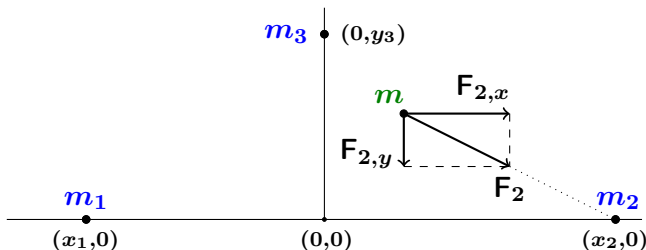
Beispiel 5.1.

Für die Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen M_a und M_b mit gegenseitigem Abstand r gilt (Newtons Gravitationsgesetz):

$$F = G \cdot \frac{M_a M_b}{r^2}$$

wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}$ (Gravitationskonstante).

Wie betrachten das folgende Gravitationsfeld:



Beispiel 5.1.

Gesucht: (x, y) , so dass für eine Punktmasse m an der Stelle (x, y) die Gravitationskräfte F_i zwischen m und m_i , $i = 1, 2, 3$, im Gleichgewicht sind.

Hilfsgrößen mit $i = 1, 2, 3$ sind

$$r_i := \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

$$F_i := G \cdot \frac{m_i m}{r_i^2}$$

$$F_{i,x} := \frac{F_i(x_i - x)}{r_i}$$

$$F_{i,y} := \frac{F_i(y_i - y)}{r_i}$$

Beispiel 5.1.

Die Gleichgewichtsbedingungen sind wie folgt:

$$F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = 0 \quad \text{und} \quad F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0$$

Hieraus ergibt sich das System

$$f_1(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i(x_i - x)}{\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$f_2(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i(y_i - y)}{\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)^{3/2}} = 0.$$

Beispiel 5.2.

Statt der **linearen** Integralgleichung im Beispiel 3.3.

$$u(x) + 2 \int_0^1 \cos(xt) u(t) dt = 2, \quad x \in [0, 1]$$

ist nun eine **nichtlineare** Integralgleichung zu lösen:

Gesucht ist eine Funktion $u(x) \geq 0$, die die **Integralgleichung**

$$u(x) + 2 \int_0^1 \cos(xt) u(t)^3 dt = 2, \quad x \in [0, 1]$$

erfüllt.

Beispiel 5.2.

Das Problem wird, wie in Beispiel 3.3., auf dem Gitter

$$t_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) h, \quad j = 1, \dots, n, \quad h = \frac{1}{n}.$$

diskretisiert.

Man erhält dann die Gleichungen

$$u_i + 2h \sum_{j=1}^n \cos(t_i t_j) u_j^3 = 2, \quad i = 1, \dots, n,$$

für die Unbekannten $u_i \approx u(t_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Problemstellung

Aufgabe

Zu gegebenem $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestimme $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$,

so dass

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1^*, \dots, x_n^*) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1^*, \dots, x_n^*) & = & 0 \end{array}$$

erfüllt ist.

Kompakte Darstellung:

$$f(x^*) = 0$$

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

- ▶ **Lineare** Gleichungssysteme: Sonderfall dieser Problemstellung

$$A x^* = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x^*) := A x^* - b = 0.$$

- ▶ Der Spezialfall $n = 1$ wird oft als **skalare** Gleichung in **einer** Unbekannten bezeichnet.
- ▶ Hat man mehr (nichtlineare) Gleichungen als Unbekannte, d.h.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } m > n$$

erhält man ein **nichtlineares Ausgleichsproblem**

↪ siehe nächstes Kapitel.