Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Nichtlineare Gleichungssysteme II

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Singulärwertzerlegung

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix

$$\Sigma := \mathrm{diag}_{mn}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad p = \min(m, n),$$

mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$, so dass

$$A = U \Sigma V^T.$$

$\|Ax - b\|_2^2 \to \min_x$ s.d. $\min \|x\|_2^2$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Singulärwertzerlegung

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix

$$\Sigma := \mathrm{diag}_{mn}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad p = \min(m, n),$$

mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$, so dass

$$A = U \Sigma V^T.$$

Lösung des allgemeinen linearen Ausgleichsproblems:

$$x^* = A^+ b.$$

mit der Pseudoinversen $A^+ = V \Sigma^+ U^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, wobei

$$\Sigma^+ = \mathrm{diag}_{nm}(\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 5.3-5.5

- Fixpunktiteration
- Banachscher Fixpunktsatz
- Konvergenz und Fehlerschätzung
- Bisektion

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie funktioniert die Fixpunktiteration?
- Aussagen des Banachschen Fixpunktsatzes
- Wie wendet man den Banachschen Fixpunktsatz an?

Problemstellung

Aufgabe

Zu gegebenem $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestimme $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$,

so dass

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, \ldots, x_n^*) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad &\quad \vdots \\ f_n(x_1^*, \ldots, x_n^*) &= 0 \end{aligned}$$

$f(x) := Ax - b$

erfüllt ist.

Kompakte Darstellung:

$$f(x^*) = 0$$

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

- Lineare Gleichungssysteme: Sonderfall dieser Problemstellung

$$A\,x^* = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x^*) := A\,x^* - b = 0.$$

- Der Spezialfall $n = 1$ wird oft als skalare Gleichung in einer Unbekannten bezeichnet.
- Hat man mehr (nichtlineare) Gleichungen als Unbekannte, d.h.

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ mit } m > n$$

erhält man ein nichtlineares Ausgleichsproblem

$\rightsquigarrow$ siehe nächstes Kapitel.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

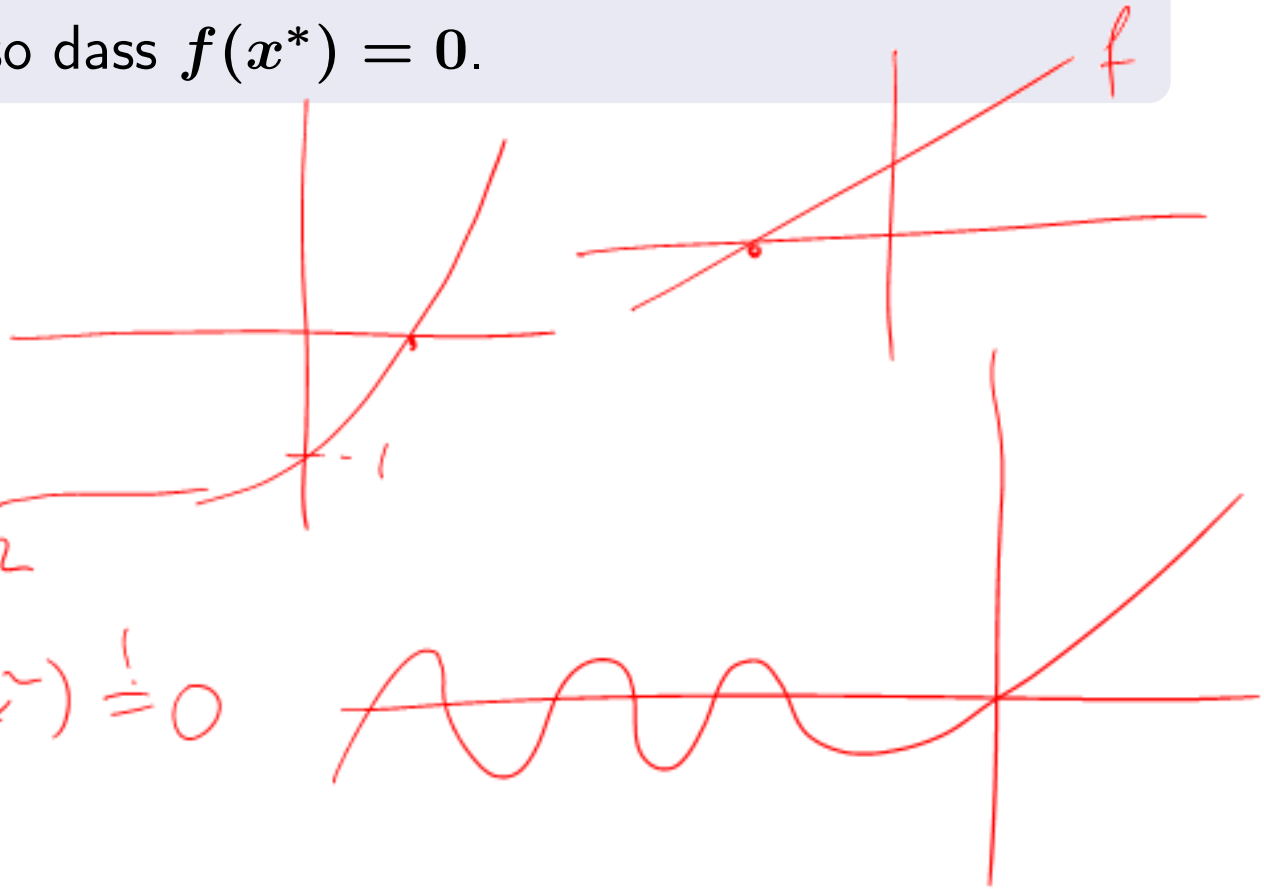
Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

$f(x) = ax + b \stackrel{!}{=} 0$

$f(x) = e^x - 2 \stackrel{!}{=} 0$

$e^x = 2 \qquad x = \ln 2$

$f(x) = 2x e^x + \sin(x^2) \stackrel{!}{=} 0$



Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$.

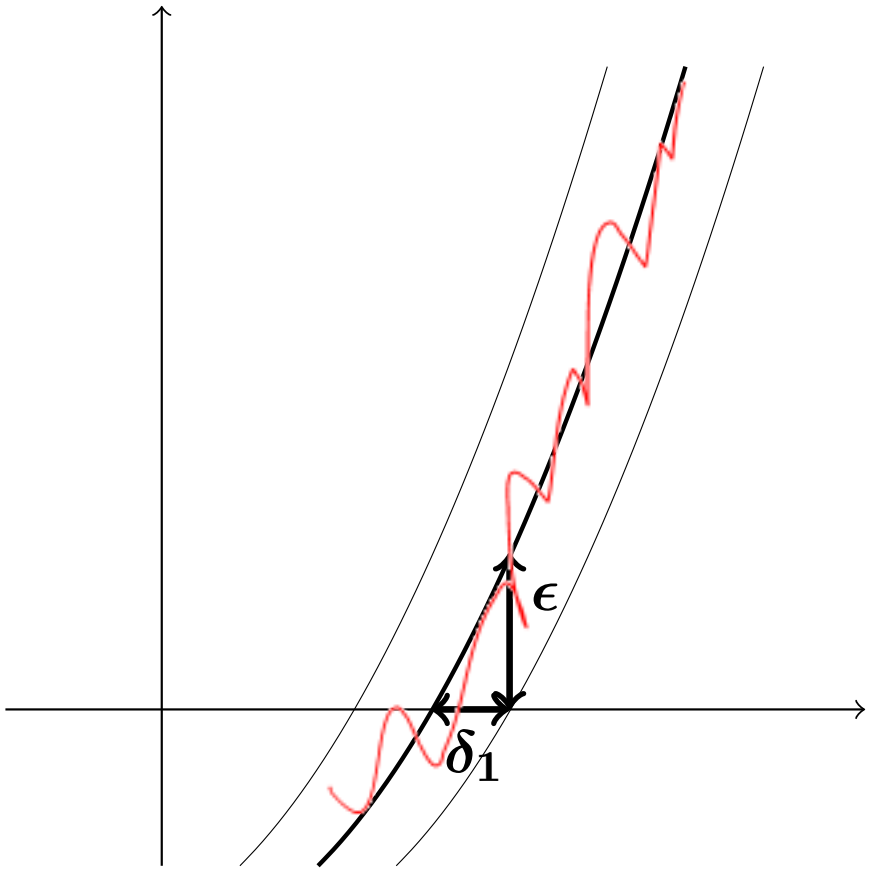
Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

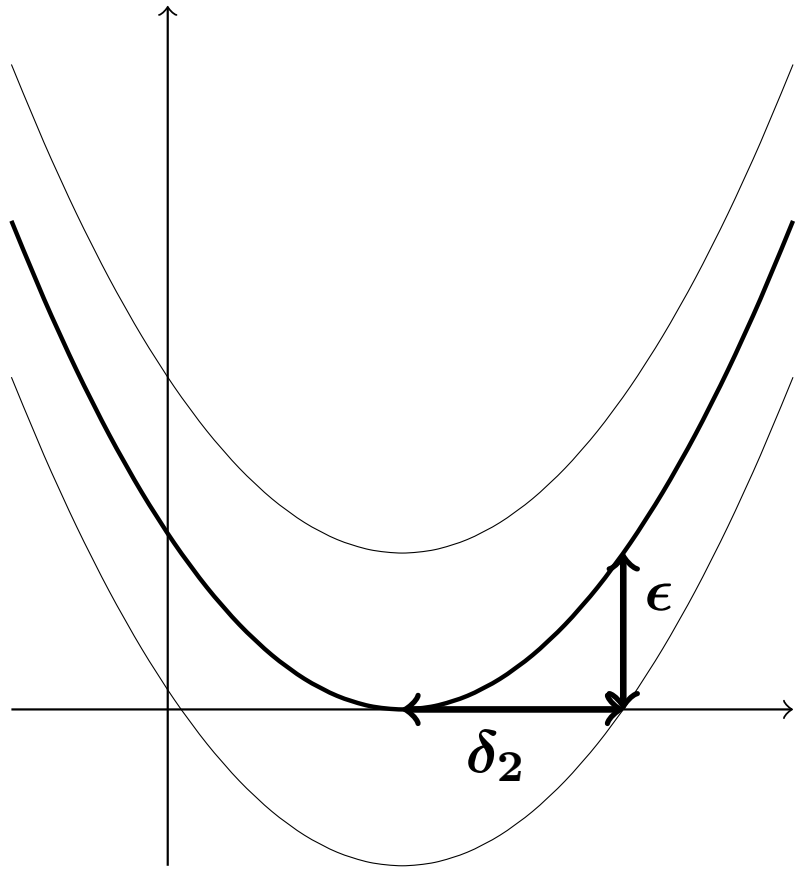
Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?
- Unter welchen Bedingungen konvergiert das Verfahren?
- Wie schnell konvergiert das Verfahren?
- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



einfache Nullstelle



doppelte Nullstelle

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Störungen in den Daten (Funktionswerten)

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

- Sei $\tilde{x}^*$ eine Nullstelle für die gestörte Funktion $\tilde{f}$, d.h.

$$\tilde{f}(\tilde{x}^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad |f(\tilde{x}^*)| \leq \epsilon.$$

- Sei m die Vielfachheit der Nullstelle x^*, d.h.

$$\begin{aligned} f(x^*) &= 0, \\ f'(x^*) &= 0, \\ &\vdots \\ f^{(m-1)}(x^*) &= 0, \\ f^{(m)}(x^*) &\neq 0. \end{aligned}$$

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich damit

$$\left| \frac{(\tilde{x}^* - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(x^*) \right| \dot{\approx} |f(\tilde{x}^*)| \leq \epsilon,$$

Störung im Ergebnis

$$|\tilde{x}^* - x^*| \lesssim \epsilon^{\frac{1}{m}} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(x^*)} \right|^{\frac{1}{m}}$$

$$f(\tilde{x}^*) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(\tilde{x}^* - x^*)^k}{k!} f^{(k)}(x^*) + O((\tilde{x}^* - x^*)^{m+1})$$

$= 0$ für $i < m$

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich damit

$$\left| \frac{(\tilde{x}^* - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(x^*) \right| \dot{\approx} |f(\tilde{x}^*)| \leq \epsilon,$$

Störung im Ergebnis

$$|\tilde{x}^* - x^*| \lesssim \epsilon^{\frac{1}{m}} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(x^*)} \right|^{\frac{1}{m}}$$

Merke:

Probleme mit mehrfachen Nullstellen sind i.A. hinsichtlich Störungen in f sehr schlecht konditioniert.

Beispiel 5.4.

Die Funktion

$$f(x) = (x-1)^3$$

hat dreifache Nullstelle $x^* = 1$.

Die Nullstelle der gestörten Funktion

$$\tilde{f}(x) = (x-1)^3 - \epsilon$$

ist

$$\tilde{x}^* = 1 + \epsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Für $\epsilon = 10^{-12}$ ergibt sich

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = 10^{-12}, \quad |x^* - \tilde{x}^*| = 10^{-4}.$$

Gestörte Funktionen können viele Nullstellen haben. Matlab-Demo

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Ein möglicher Ansatz für eine Fixpunktiteration:

- Sei $\boldsymbol{M_x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine von $\boldsymbol{x}$ abhängige Matrix, die in einer Umgebung der Nullstelle $\boldsymbol{x^*}$ invertierbar ist. Dann folgt

$$\boldsymbol{f(x^*) = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{M_{x^*}\, f(x^*) = 0}$$

- Erweitere die Gleichung mit $\boldsymbol{x^*}$, d.h.

$$\boldsymbol{M_{x^*}\, f(x^*) = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x^* = x^* - M_{x^*}\, f(x^*)}$$

$$= \phi(x^*)$$

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Ein möglicher Ansatz für eine Fixpunktiteration:

- Sei $\boldsymbol{M_x} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine von $\boldsymbol{x}$ abhängige Matrix, die in einer Umgebung der Nullstelle $\boldsymbol{x^*}$ invertierbar ist. Dann folgt
$$\boldsymbol{f(x^*) = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{M_{x^*}\ f(x^*) = 0}$$
- Erweitere die Gleichung mit $\boldsymbol{x^*}$, d.h.
$$\boldsymbol{M_{x^*}\ f(x^*) = 0} \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x^* = x^* - M_{x^*}\ f(x^*)}$$

Daraus folgt: Das Nullstellenproblem
$$\boldsymbol{f(x^*) = 0}$$
ist äquivalent zum Fixpunktproblem
$$\boldsymbol{x^* = \Phi(x^*)}, \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Phi(x) := x - M_x\ f(x).}$$

Fixpunktiteration

Fixpunktiteration

- Wähle Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*
- Bilde

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

falls $x_k \longrightarrow x^*$ + Φ stetig

$$\Rightarrow x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \Phi(x_k)$$

$$= \Phi\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \Phi(x^*)$$

Fixpunktiteration

Fixpunktiteration

- Wähle Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*
- Bilde

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Bemerkungen:

1. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Steigung von Φ an x^* entscheidet darüber, ob die Fixpunktiteration gegen x^* konvergiert/divergiert:
   - $|\Phi'(x^*)| < 1$: x^* anziehend
   - $|\Phi'(x^*)| > 1$: x^* abstoßend Matlab-Demo
2. Durch eine geeignete Wahl von M_x (bzw. Φ) lässt sich die Konvergenz der Fixpunktiteration positiv beeinflussen.

Ein paar Definitionen

Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Ein differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\|f'(x)\| \leq L$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante L.
Hierbei ist $f'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Jacobi-Matrix von f an der Stelle x.

Ein paar Definitionen

Kontraktion

Sei $\boldsymbol{E} \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{E} \to \mathbb{R}^n$ heißt Kontraktion auf $\boldsymbol{E}$, wenn

$$\|\boldsymbol{\Phi}(x) - \boldsymbol{\Phi}(y)\| \leq \boldsymbol{L} \|x - y\|$$

für alle $x, y \in \boldsymbol{E}$ mit $\boldsymbol{L < 1}$.

- $\boldsymbol{\Phi}$ ist genau dann eine Kontraktion, wenn sie Lipschitz-stetig mit der Konstanten $\boldsymbol{L} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1})$ ist.

Selbstabbildung

Eine Abbildung $\boldsymbol{\Phi}$ ist eine Selbstabbildung auf $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^n$, wenn

$$\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}.$$

Beispiel 5.7.

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$, da $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 61 > 0$.
- Mögliche Fixpunktfunktionen sind

$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x+1)^{\frac{1}{6}}.$$

$x = \Phi_1(x)$
$\Leftrightarrow x = x^6 - 1$
$\Leftrightarrow x^6 - x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow f(x) = 0$
$(M_x = -1)$

$x = \Phi_2(x)$
$\Leftrightarrow x = (x+1)^{\frac{1}{6}}$
$x > 0$
$\Leftrightarrow x^6 = x + 1$
$\Leftrightarrow x^6 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Beispiel 5.7.

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$, da $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 61 > 0$.
- Mögliche Fixpunktfunktionen sind

$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x+1)^{\frac{1}{6}}.$$

- Betrachte Φ_1: wir erhalten

$$|\Phi_1'(x)| = |6\,x^5| > 1 \quad \text{für } x \in [1, 2],$$

d.h. Φ_1 ist nicht als Fixpunktfunktion geeignet.

- Betrachte Φ_2: wir erhalten

$$|\Phi_2'(x)| = \left|\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{5}{6}}\right| \leq \frac{1}{6} \quad \text{für } x \in [1, 2],$$

Beispiel 5.7.

und damit (Mittelwertsatz, $\xi \in (1,2)$)

$$\begin{aligned} |\Phi_2(x) - \Phi_2(y)| &= |\Phi_2'(\xi)(x-y)| \\ &\leq \tfrac{1}{6}\,|x-y| \quad \text{für } x, y \in [1,2]. \end{aligned}$$

- Die Funktion Φ_2 ist eine Selbstabbildung auf $[1,2]$, d.h. $\Phi_2 : [1,2] \to [1,2]$.
- Ergebnisse

k	$x_0 = 1.2$ $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$	$x_0 = 1.135$ $x_{k+1} = \Phi_1(x_k)$
0	1.20000000	1.14e+000
1	1.14043476	1.14e+000
2	1.13522949	1.17e+000
3	1.13476890	1.57e+000
4	1.13472810	1.38e+001
5	1.13472448	6.91e+006
6	1.13472416	1.09e+041
7	1.13472414	1.66e+246

Matlab-Demo

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E, d.h. für ein $L < 1$ ist

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E \ .$$

Dann gilt:

1. Es existiert genau ein Fixpunkt x^* von Φ in E.
2. Für beliebiges $x_0 \in E$ konvergiert die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

gegen den Fixpunkt x^*.

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E, d.h. für ein $L < 1$ ist

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E \ .$$

3. A-priori-Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L}\|x_1 - x_0\|.$$

4. A-posteriori-Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1 - L}\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E, d.h. für ein $L < 1$ ist

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E \ .$$

Bemerkung: Wegen

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq L \, \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \cdots \leq L^{k-1} \, \|x_1 - x_0\|$$

ist die Schranke in der a-posteriori-Fehlerabschätzung immer besser (d.h. kleiner) als die in der a-priori-Fehlerabschätzung.

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Frage:

Unter welchen Bedingungen konvergiert ein iteratives Verfahren?

$\Rightarrow$ Eine hinreichende Bedingung, damit

$$x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, \ldots$$

gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert ist, dass Φ ein kontrahierende Selbstabbildung ist.

Frage:

- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?
- Wieviel Iterationen k sind nötig um eine gewünschte Genauigkeit ϵ erreichen, so dass

$$\|x_k - x^*\| \leq \epsilon \ ?$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Antwort:

$\Rightarrow$ Die a-priori-Fehlerabschätzung liefert die Schranke

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \overset{!}{<} \epsilon \,. \qquad (*)$$

Umstellen nach k gibt die maximal benötigte Anzahl an Iterationen

$$k \geq \log\left(\frac{\epsilon\,(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}\right) \Big/ \log L \,.$$

$(*) \Leftrightarrow L^k \|x_1 - x_0\| \leq \epsilon(1-L) \Leftrightarrow L^k \leq \frac{\epsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}$

$\Leftrightarrow k \underbrace{\log L}_{<0} \leq \log\left(\frac{\epsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}\right)$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Antwort:

$\Rightarrow$ Die a-priori-Fehlerabschätzung liefert die Schranke

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \overset{!}{<} \epsilon \, .$$

Umstellen nach k gibt die maximal benötigte Anzahl an Iterationen

$$k \geq \log\left(\frac{\epsilon\,(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}\right) \Big/ \log L \, .$$

Bemerkung: Bei der Implementation sollte die a-posteriori-Fehlerabschätzung als Abbruchkriterium

$$\|x_k - x^*\| \leq \tfrac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\| \overset{!}{\leq} \epsilon \quad \text{genutzt werden.}$$

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.10.

Sei $X = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$ und Φ auf E stetig differenzierbar.
Es gelte

$$\Phi : [a, b] \to [a, b] \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und

$$\max_{x \in [a,b]} \left|\Phi'(x)\right| =: L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen des BF-Satzes erfüllt ($\|\cdot\| = |\cdot|$).

Beachte

Φ ist eine Kontraktion, da nach den Mittelwertsatz gilt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)\,(x - y)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} |\Phi'(\xi)|\,|x - y| \,.$$

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.11.

Sei $E \subseteq X = \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, und $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : E \to E \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und bzgl. einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gelte für die zugehörige Matrixnorm

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| = L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen des BF-Satzes erfüllt.

Hierbei ist

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_n(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_n(x) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von Φ an der Stelle x.

Beispiel 5.13.

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞-Norm.

- Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{8}xy^2 + \frac{1}{8}\sin x \end{pmatrix}$$

- Selbstabbildung:
  Für $x \in [0,1]$ gilt $0 \leq \cos x \leq 1$ und $0 \leq \sin x \leq 1$.
  Daher gilt

$$\Phi : E \to E \ .$$

Beispiel 5.13.

- Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4}xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞-Norm auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x,y)\|_\infty &= \max\left\{\tfrac{1}{6}|\sin x| + \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{8}\left(\left|y^2 + \cos x\right| + 2|xy|\right)\right\} \\ &\leq \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.11. existiert genau eine Lösung in E.

- Fehlerschätzung: Mit $\epsilon = 10^{-3}$ und $L = \frac{1}{2}$ ist die Schrittanzahl maximal

$$k \geq \log\left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{\|x_1 - x_0\|_\infty}\right) \Big/ \log\frac{1}{2} = \frac{\log\left(2000\,\|x_1 - x_0\|_\infty\right)}{\log(2)}.$$

Beispiel 5.13.

Für den Startwert

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

erhält man als 1. Iterierte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x_0 + \frac{1}{3} y_0 \\ \frac{1}{8} x_0\, y_0^2 + \frac{1}{8}\sin x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$k \geq \frac{\log\left(2000\, \|x_1 - x_0\|_\infty\right)}{\log(2)} = \frac{\log\left(2000/6\right)}{\log(2)} = 8.38\ ,$$

d.h. es werden maximal 9 Iterationen benötigt.

Beispiel 5.13.

Numerische Verifikation der Ergebnisse:

Die dritten Spalte enthält die a-posteriori-Fehlerabschätzung.

k	$(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_k, y_k) = \Phi(x_{k-1}, y_{k-1})$	$\frac{0.5}{1-0.5} * \|(x_k, y_k)^T - (x_{k-1}, y_{k-1})^T\|_\infty$
0	(0.00000000, 0.00000000)	–
1	(0.16666667, 0.00000000)	1.67e−01
2	(0.16435721, 0.02073702)	2.07e−02
3	(0.17133296, 0.02046111)	6.98e−03
4	(0.17104677, 0.02132096)	8.60e−04
5	(0.17134151, 0.02128646)	2.95e−04
6	(0.17132164, 0.02132275)	3.63e−05
7	(0.17133430, 0.02132034)	1.27e−05
8	(0.17133314, 0.02132189)	1.56e−06
9	(0.17133369, 0.02132175)	5.52e−07

$< 10^{-3}$

Beispiel 5.13.

Numerische Verifikation der Ergebnisse:

Die dritten Spalte enthält die a-posteriori-Fehlerabschätzung.

k	$(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_k, y_k) = \Phi(x_{k-1}, y_{k-1})$	$\frac{0.5}{1-0.5} * \|(x_k, y_k)^T - (x_{k-1}, y_{k-1})^T\|_\infty$
0	(0.00000000, 0.00000000)	–
1	(0.16666667, 0.00000000)	1.67e−01
2	(0.16435721, 0.02073702)	2.07e−02
3	(0.17133296, 0.02046111)	6.98e−03
4	(0.17104677, 0.02132096)	8.60e−04
5	(0.17134151, 0.02128646)	2.95e−04
6	(0.17132164, 0.02132275)	3.63e−05
7	(0.17133430, 0.02132034)	1.27e−05
8	(0.17133314, 0.02132189)	1.56e−06
9	(0.17133369, 0.02132175)	5.52e−07

Aus der a-posteriori-Fehlerabschätzung ergibt sich, dass schon für $k = 4$ (statt $k = 9$) die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

$$x_k := \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0 =: x^*$$

$$\|x_{k+1} - x^*\| = \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\|x_k - x^*\|$$

$$\Rightarrow p = 1 \,, \quad c = \frac{1}{2}$$

$$x_k = \frac{1}{2^{(2^k)}} \longrightarrow 0 =: x^*$$

$$\Rightarrow \|x_{k+1} - x^*\| = \frac{1}{2^{(2^{k+1})}} = \frac{1}{(2^k)_2} = \|x_k - x^*\|^2$$

$$\Rightarrow p = 2 \,, \quad c = 1$$

$$x_k = \frac{1}{k}$$

Konvergenzordnung

Ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge ist der Begriff der Konvergenzordnung.

Definition 5.14.

Eine konvergente Folge

$$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$$

mit Grenzwert x^* hat die Konvergenzordnung p,
falls für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \, \|x_k - x^*\|^p \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

wobei

$$0 < c < 1 \quad \text{falls} \quad p = 1.$$

Konvergenzordnung

Die Konvergenzordnung eines iterativen Verfahrens kann man entsprechend festlegen

Definition

Ein iteratives Verfahren zur Bestimmung von $x^* \in \mathbb{R}^n$ *(z.B. die Nullstelle einer Funktion)* hat die

Konvergenzordnung p,

wenn es eine Umgebung U von x^* gibt, so dass für alle Startwerte

$$x_0 \in U \setminus \{x^*\}$$

die von dem Verfahren erzeugte Folge gegen x^* konvergiert und sie die Konvergenzordnung p hat.

Beispiel 5.15.

Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit zwischen

1. Verfahren der Ordnung $p = 1$ (lineare Konvergenz), und
2. Verfahren der Ordnung $p = 2$ (quadratische Konvergenz).

Sei $\|x_0 - x^*\| = 0.2$ und $e_k := \|x_k - x^*\|$, dann ergibt sich

1. Linear: $p = 1$ und $c = \frac{1}{2}$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125

2. Quadratisch: $p = 2$ und $c = 3$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.12	0.0432	0.0056	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-15}$

Bemerkungen 5.16.

Sei $$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

eine konvergente Fixpunktiteration mit Fixpunkt x^*.

Mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung erhält man

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= \Phi(x_k) - \Phi(x^*) \\ &= \Phi'(x^*)\,(x_k - x^*) + \mathcal{O}\big(\|x_k - x^*\|^2\big). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Konvergenzordnung:

- wenn $0 < \|\Phi'(x^*)\| < 1$: Lineare Konvergenz ($p = 1$).
- wenn $\Phi'(x^*) = 0$: Quadratische Konvergenz ($p = 2$).

Für die meisten in der Praxis benutzten Methoden zur Nullstellenbestimmung gilt $p = 1$ oder $p = 2$ (also lineare oder quadratische Konvergenz).

Methode für skalare Gleichungen: Bisektion

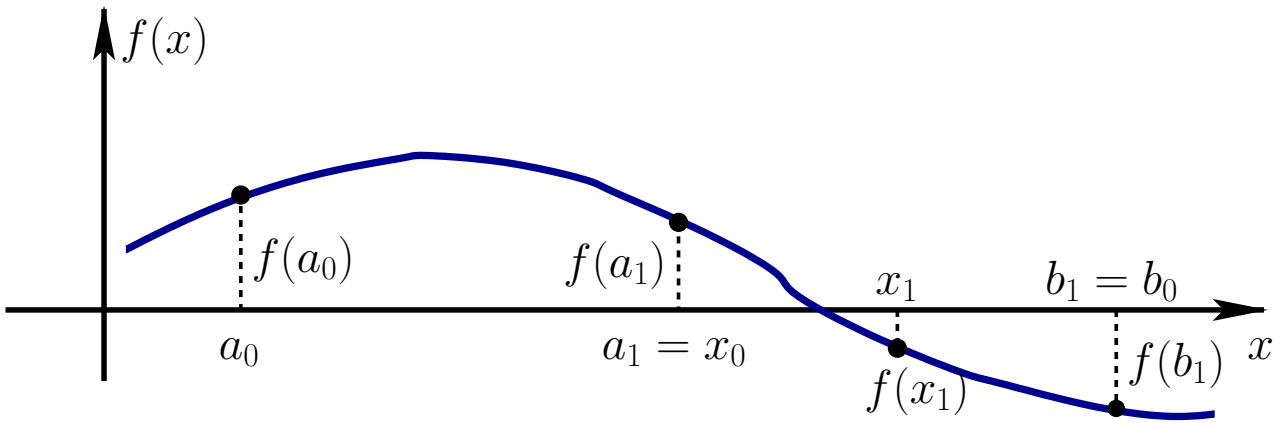
Algorithmus 5.20.

Gegeben $a_0 < b_0$ mit $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ berechne:

- $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ und $f(x_k)$
- Setze

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k \quad \text{falls } f(x_k)\, f(a_k) \leq 0$$
$$a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k \quad \text{sonst.}$$



Beispiel 5.21.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Bisektion (vgl. Beispiel 5.7.).

Die Bisektion mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $b_0 = 2$ liefert:

k	a_k	b_k	x_k	$b_k - a_k$	$f(x_k)$
0	1.00000	2.00000	1.50000	1.00000	8.89062
1	1.00000	1.50000	1.25000	0.50000	1.56470
2	1.00000	1.25000	1.12500	0.25000	−0.09771
3	1.12500	1.25000	1.18750	0.12500	0.61665
4	1.12500	1.18750	1.15625	0.06250	0.23327
5	1.12500	1.15625	1.14062	0.03125	0.06158
6	1.12500	1.14062	1.13281	0.01562	−0.01958
7	1.13281	1.14062	1.13672	0.00781	0.02062
8	1.13281	1.13672	1.13477	0.00391	0.00043
9	1.13281	1.13477	1.13379	0.00195	−0.00960

Zusammenfassung

- Nullstellenproblem $\boldsymbol{f(x) = 0} \Leftrightarrow$ Fixpunktproblem $\boldsymbol{\Phi(x) = x}$.
  Es gibt viele Möglichkeiten für $\boldsymbol{\Phi}$, zum Beispiel:
  für invertierbare Matrix $\boldsymbol{M_x}$: $\boldsymbol{\Phi(x) = x - M_x f(x)}$.
- Fixpunktiteration:
$$\boldsymbol{x_{k+1} = \Phi(x_k)}$$
- Banachscher Fixpunktsatz:
$$\boldsymbol{\Phi : E \to E} \qquad \text{(Selbstabbildung)}$$
$$\boldsymbol{\Phi} \text{ Kontraktion auf } \boldsymbol{E}$$
  hinreichende Bedingung für Konvergenz der Fixpunktiteration.
- $\boldsymbol{n = 1}$ (skalares Problem): geometrische Darstellung der Fixpunktiteration.

Zusammenfassung

- Konvergenzordnung: Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit
- Methode für skalare Nullstellenprobleme: Bisektion
  $\Rightarrow$ nächste Vorlesung mehr.

Verständnisfragen

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;
$x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

f Für alle Gleichungssysteme der Form $f(x^*) = 0$ gibt es keine analytische Lösung.

w Die Lösung x^* eines nichtlinearen Gleichungssystems ist im allgemeinen nicht eindeutig.

f Die Kondition des skaleren nichtlinearen Problems ist unabhängig von der Vielfachheit der Nullstelle.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.

f Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in $\mathbb{R}$.

w Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf $E = [-1, 0]$ erfüllt.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf $E = [0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. 0.5

Verständnisfragen

Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = |x|^{2.5} - 3$.

W f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $[0, \infty)$.

☐ Die Bisektionsmethode, mit den Startwerten $a_0 = -1$ und $b_0 = 2$ konvergiert gegen eine Nullstelle.

$f(a_0) < 0$ $\quad$ $f(b_0) > 1$

Verständnisfragen

Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = |x|^{2.5} - 3$.

W f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $[0, \infty)$.

W Die Bisektionsmethode, mit den Startwerten $a_0 = -1$ und $b_0 = 2$ konvergiert gegen eine Nullstelle.