

Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Nichtlineare Gleichungssysteme II

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Singulärwertzerlegung

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine **Diagonalmatrix**

$$\Sigma := \text{diag}_{mn}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad p = \min(m, n),$$

mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$, so dass

$$A = U \Sigma V^T.$$

Lösung des **allgemeinen linearen Ausgleichsproblems**:

$$x^* = A^+ b.$$

mit der Pseudoinversen $A^+ = V \Sigma^+ U^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, wobei

$$\Sigma^+ = \text{diag}_{nm}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Heute in der Vorlesung

Themen:

Dahmen & Reusken Kap 5.3-5.5

- ▶ Fixpunktiteration
- ▶ Banachscher Fixpunktsatz
- ▶ Konvergenz und Fehlerschätzung
- ▶ Bisektion

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie funktioniert die Fixpunktiteration?
- ▶ Aussagen des Banachschen Fixpunktsatzes
- ▶ Wie wendet man den Banachschen Fixpunktsatz an?

Problemstellung

Aufgabe

Zu gegebenem $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestimme $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$,

so dass

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1^*, \dots, x_n^*) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1^*, \dots, x_n^*) & = & 0 \end{array}$$

erfüllt ist.

Kompakte Darstellung:

$$f(x^*) = 0$$

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

- ▶ **Lineare** Gleichungssysteme: Sonderfall dieser Problemstellung

$$A x^* = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x^*) := A x^* - b = 0.$$

- ▶ Der Spezialfall $n = 1$ wird oft als **skalare** Gleichung in **einer** Unbekannten bezeichnet.
- ▶ Hat man mehr (nichtlineare) Gleichungen als Unbekannte, d.h.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ mit } m > n$$

erhält man ein **nichtlineares Ausgleichsproblem**

↪ siehe nächstes Kapitel.

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Gesucht: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$.

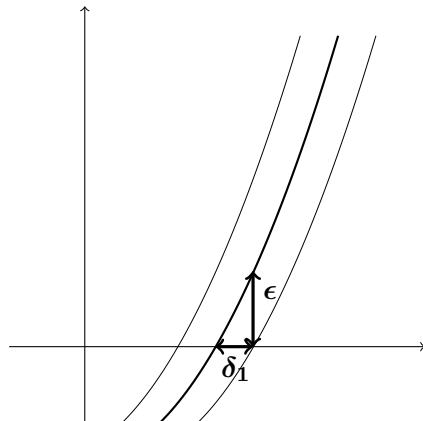
Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. **exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.**

Vorgehen: **iterative** Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

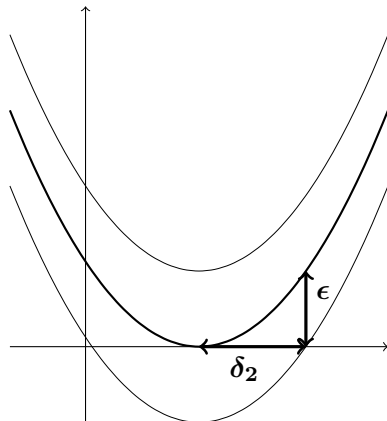
Fragen/Probleme:

- ▶ Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?
- ▶ Unter welchen Bedingungen konvergiert das Verfahren?
- ▶ Wie schnell konvergiert das Verfahren?
- ▶ Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



einfache Nullstelle



doppelte Nullstelle

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- ▶ Störungen in den Daten (Funktionswerten)

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

- ▶ Sei $\tilde{x}^*$ eine Nullstelle für die gestörte Funktion $\tilde{f}$, d.h.

$$\tilde{f}(\tilde{x}^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad |f(\tilde{x}^*)| \leq \epsilon.$$

- ▶ Sei m die Vielfachheit der Nullstelle x^* , d.h.

$$f(x^*) = 0,$$

$$f'(x^*) = 0,$$

$$\vdots$$

$$f^{(m-1)}(x^*) = 0,$$

$$f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich damit

$$\left| \frac{(\tilde{x}^* - x^*)^m}{m!} \cdot f^{(m)}(x^*) \right| \approx |f(\tilde{x}^*)| \leq \epsilon,$$

Störung im Ergebnis

$$|\tilde{x}^* - x^*| \lesssim \epsilon^{\frac{1}{m}} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(x^*)} \right|^{\frac{1}{m}}$$

Merke:

Probleme mit mehrfachen Nullstellen sind i.A. hinsichtlich Störungen in f sehr schlecht konditioniert.

Beispiel 5.4.

Die Funktion

$$f(x) = (x - 1)^3$$

hat dreifache Nullstelle $x^* = 1$.

Die Nullstelle der gestörten Funktion

$$\tilde{f}(x) = (x - 1)^3 - \epsilon$$

ist

$$\tilde{x}^* = 1 + \epsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Für $\epsilon = 10^{-12}$ ergibt sich

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = 10^{-12}, \quad |x^* - \tilde{x}^*| = 10^{-4}.$$

Gestörte Funktionen können viele Nullstellen haben. Matlab-Demo

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- ▶ Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Ein möglicher Ansatz für eine Fixpunktiteration:

- ▶ Sei $M_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine von x abhängige Matrix, die in einer Umgebung der Nullstelle x^* invertierbar ist. Dann folgt

$$f(x^*) = 0 \iff M_{x^*} f(x^*) = 0$$

- ▶ Erweitere die Gleichung mit x^* , d.h.

$$M_{x^*} f(x^*) = 0 \iff x^* = x^* - M_{x^*} f(x^*)$$

Daraus folgt: Das Nullstellenproblem

$$f(x^*) = 0$$

ist äquivalent zum Fixpunktproblem

$$x^* = \Phi(x^*), \quad \text{mit} \quad \Phi(x) := x - M_x f(x).$$

Fixpunktiteration

Fixpunktiteration

- ▶ Wähle Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*
- ▶ Bilde

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkungen:

1. $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Steigung von Φ an x^* entscheidet darüber, ob die Fixpunktiteration gegen x^* konvergiert/divergiert:
 - ▶ $|\Phi'(x^*)| < 1$: x^* anziehend
 - ▶ $|\Phi'(x^*)| > 1$: x^* abstoßend Matlab-Demo
2. Durch eine geeignete Wahl von M_x (bzw. Φ) lässt sich die Konvergenz der Fixpunktiteration positiv beeinflussen.

Ein paar Definitionen

Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt **Lipschitz-stetig**, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Ein differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|f'(x)\| \leq L$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig mit Konstante L .

Hierbei ist $f'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Jacobi-Matrix von f an der Stelle x .

Ein paar Definitionen

Kontraktion

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Kontraktion** auf E , wenn

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in E$ mit $L < 1$.

- Φ ist genau dann eine Kontraktion, wenn sie **Lipschitz-stetig** mit der Konstanten $L \in [0, 1)$ ist.

Selbstabbildung

Eine Abbildung Φ ist eine **Selbstabbildung** auf $E \subset \mathbb{R}^n$, wenn

$$\Phi : E \rightarrow E.$$

Beispiel 5.7.

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$, da $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 61 > 0$.
- Mögliche Fixpunktfunktionen sind

$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x + 1)^{\frac{1}{6}}.$$

- Betrachte Φ_1 : wir erhalten

$$|\Phi_1'(x)| = |6x^5| > 1 \quad \text{für } x \in [1, 2],$$

d.h. Φ_1 ist **nicht als Fixpunktfunktion geeignet**.

- Betrachte Φ_2 : wir erhalten

$$|\Phi_2'(x)| = \left| \frac{1}{6}(x + 1)^{-\frac{5}{6}} \right| \leq \frac{1}{6} \quad \text{für } x \in [1, 2],$$

Beispiel 5.7.

und damit (Mittelwertsatz, $\xi \in (1, 2)$)

$$\begin{aligned} |\Phi_2(x) - \Phi_2(y)| &= |\Phi'_2(\xi)(x - y)| \\ &\leq \frac{1}{6} |x - y| \quad \text{für } x, y \in [1, 2]. \end{aligned}$$

- Die Funktion Φ_2 ist eine **Selbstabbildung** auf $[1, 2]$, d.h. $\Phi_2 : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$.
- Ergebnisse

k	$x_0 = 1.2$ $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$	$x_0 = 1.135$ $x_{k+1} = \Phi_1(x_k)$
0	1.20000000	1.14e+000
1	1.14043476	1.14e+000
2	1.13522949	1.17e+000
3	1.13476890	1.57e+000
4	1.13472810	1.38e+001
5	1.13472448	6.91e+006
6	1.13472416	1.09e+041
7	1.13472414	1.66e+246

Matlab-Demo

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X . Sei Φ eine **Selbstabbildung** auf E , d.h.

$$\Phi : E \rightarrow E,$$

und ferner eine **Kontraktion auf E** , d.h. für ein $L < 1$ ist

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

Dann gilt:

1. Es **existiert genau ein Fixpunkt** x^* von Φ in E .
2. Für beliebiges $x_0 \in E$ **konvergiert** die **Fixpunktiteration**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

gegen den **Fixpunkt** x^* .

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X . Sei Φ eine **Selbstabbildung** auf E , d.h.

$$\Phi : E \rightarrow E,$$

und ferner eine **Kontraktion auf E** , d.h. für ein $L < 1$ ist

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

3. **A-priori-Fehlerabschätzung:**

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L} \|x_1 - x_0\|.$$

4. **A-posteriori-Fehlerabschätzung:**

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1 - L} \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X . Sei Φ eine **Selbstabbildung** auf E , d.h.

$$\Phi : E \rightarrow E,$$

und ferner eine **Kontraktion auf E** , d.h. für ein $L < 1$ ist

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E.$$

Bemerkung: Wegen

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq L \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \leq \dots \leq L^{k-1} \|x_1 - x_0\|$$

ist die Schranke in der a-posteriori-Fehlerabschätzung immer besser (d.h. kleiner) als die in der a-priori-Fehlerabschätzung.

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Frage:

Unter welchen Bedingungen konvergiert ein iteratives Verfahren?

⇒ Eine **hinreichende Bedingung**, damit

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert ist, dass Φ ein **kontrahierende Selbstabbildung** ist.

Frage:

- ▶ Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?
- ▶ Wieviel Iterationen k sind nötig um eine gewünschte Genauigkeit ϵ erreichen, so dass

$$\|x_k - x^*\| \leq \epsilon ?$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Antwort:

⇒ Die a-priori-Fehlerabschätzung liefert die Schranke

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\| \stackrel{!}{<} \epsilon .$$

Umstellen nach k gibt die maximal benötigte Anzahl an Iterationen

$$k \geq \log \left(\frac{\epsilon (1-L)}{\|x_1 - x_0\|} \right) / \log L .$$

Bemerkung: Bei der Implementation sollte die a-posteriori-Fehlerabschätzung als [Abbruchkriterium](#)

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\| \stackrel{!}{\leq} \epsilon \quad \text{genutzt werden.}$$

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.10.

Sei $X = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$ und Φ auf E stetig differenzierbar.
Es gelte

$$\Phi : [a, b] \rightarrow [a, b] \quad (\text{Selbstabbildung}),$$

und

$$\max_{x \in [a, b]} |\Phi'(x)| =: L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen des BF-Satzes erfüllt ($\|\cdot\| = |\cdot|$).

Beachte

Φ ist eine Kontraktion, da nach den Mittelwertsatz gilt

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)(x - y)| \leq \max_{\xi \in [a, b]} |\Phi'(\xi)| |x - y|.$$

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.11.

Sei $E \subseteq X = \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, und $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : E \rightarrow E \quad (\text{Selbstabbildung}),$$

und bzgl. einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gelte für die zugehörige Matrixnorm

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| = L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen des BF-Satzes erfüllt.

Hierbei ist

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_n(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi_n(x) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix von Φ an der Stelle x .

Beispiel 5.13.

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned} 6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x \end{aligned}$$

auf $E = [0, 1] \times [0, 1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit 10^{-3} in der ∞ -Norm.

► Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{3} y \\ \frac{1}{8} xy^2 + \frac{1}{8} \sin x \end{pmatrix}$$

► Selbstabbildung:

Für $x \in [0, 1]$ gilt $0 \leq \cos x \leq 1$ und $0 \leq \sin x \leq 1$.

Daher gilt

$$\Phi : E \rightarrow E .$$

Beispiel 5.13.

- **Kontraktion:** Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{8} \cos x & \frac{1}{4} xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞ -Norm auf $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x, y)\|_{\infty} &= \max \left\{ \frac{1}{6} |\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8} (|y^2 + \cos x| + 2|xy|) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.11. existiert genau eine Lösung in E .

- **Fehlerschätzung:** Mit $\epsilon = 10^{-3}$ und $L = \frac{1}{2}$ ist die Schrittzahl maximal

$$k \geq \log \left(\frac{0.5 \cdot 10^{-3}}{\|x_1 - x_0\|_{\infty}} \right) / \log \frac{1}{2} = \frac{\log(2000 \|x_1 - x_0\|_{\infty})}{\log(2)}.$$

Beispiel 5.13.

Für den Startwert

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

erhält man als 1. Iterierte

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cos x_0 + \frac{1}{3} y_0 \\ \frac{1}{8} x_0 y_0^2 + \frac{1}{8} \sin x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$k \geq \frac{\log(2000 \|x_1 - x_0\|_\infty)}{\log(2)} = \frac{\log(2000/6)}{\log(2)} = 8.38 ,$$

d.h. es werden maximal 9 Iterationen benötigt.

Beispiel 5.13.

Numerische Verifikation der Ergebnisse:

Die dritten Spalte enthält die **a-posteriori-Fehlerabschätzung**.

k	$(x_0, y_0) = (0, 0),$ $(x_k, y_k) = \Phi(x_{k-1}, y_{k-1})$	$\frac{0.5}{1-0.5}^* \ (x_k, y_k)^T - (x_{k-1}, y_{k-1})^T\ _\infty$
0	(0.00000000, 0.00000000)	—
1	(0.16666667, 0.00000000)	1.67e-01
2	(0.16435721, 0.02073702)	2.07e-02
3	(0.17133296, 0.02046111)	6.98e-03
4	(0.17104677, 0.02132096)	8.60e-04
5	(0.17134151, 0.02128646)	2.95e-04
6	(0.17132164, 0.02132275)	3.63e-05
7	(0.17133430, 0.02132034)	1.27e-05
8	(0.17133314, 0.02132189)	1.56e-06
9	(0.17133369, 0.02132175)	5.52e-07

Aus der a-posteriori-Fehlerabschätzung ergibt sich, dass schon für **$k = 4$** (statt **$k = 9$**) die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Konvergenzordnung

Ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge ist der Begriff der **Konvergenzordnung**.

Definition 5.14.

Eine konvergente Folge

$$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$$

mit Grenzwert x^* hat die Konvergenzordnung p , falls für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^p \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

wobei

$$0 < c < 1 \quad \text{falls } p = 1.$$

Konvergenzordnung

Die Konvergenzordnung eines iterativen Verfahrens kann man entsprechend festlegen

Definition

Ein **iteratives Verfahren** zur Bestimmung von $x^* \in \mathbb{R}^n$ (z.B. *die Nullstelle einer Funktion*) hat die

Konvergenzordnung p ,

wenn es eine Umgebung U von x^* gibt, so dass für alle Startwerte

$$x_0 \in U \setminus \{x^*\}$$

die **von dem Verfahren erzeugte Folge** gegen x^* konvergiert und sie die **Konvergenzordnung p** hat.

Beispiel 5.15.

Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit zwischen

1. Verfahren der Ordnung $p = 1$ (lineare Konvergenz), und
2. Verfahren der Ordnung $p = 2$ (quadratische Konvergenz).

Sei $\|x_0 - x^*\| = 0.2$ und $e_k := \|x_k - x^*\|$, dann ergibt sich

1. Linear: $p = 1$ und $c = \frac{1}{2}$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125

2. Quadratisch: $p = 2$ und $c = 3$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.12	0.0432	0.0056	$9 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-15}$

Bemerkungen 5.16.

Sei $x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, \dots,$

eine **konvergente Fixpunktiteration** mit Fixpunkt x^* .

Mit Hilfe der Taylor-Reihenentwicklung erhält man

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= \Phi(x_k) - \Phi(x^*) \\ &= \Phi'(x^*) (x_k - x^*) + \mathcal{O}(\|x_k - x^*\|^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die **Konvergenzordnung**:

- ▶ wenn $0 < \|\Phi'(x^*)\| < 1$: **Lineare** Konvergenz ($p = 1$).
- ▶ wenn $\Phi'(x^*) = 0$: **Quadratische** Konvergenz ($p = 2$).

Für die meisten in der Praxis benutzten Methoden zur Nullstellenbestimmung gilt $p = 1$ oder $p = 2$ (also lineare oder quadratische Konvergenz).

Methode für skalare Gleichungen: Bisektion

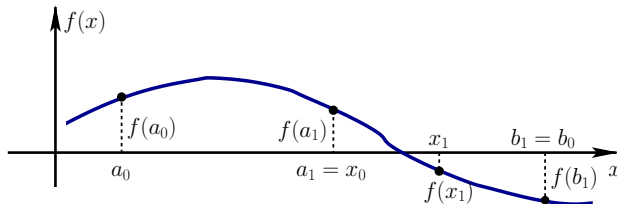
Algorithmus 5.20.

Gegeben $a_0 < b_0$ mit $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

Für $k = 0, 1, 2, \dots$ berechne:

- ▶ $x_k = \frac{1}{2} (a_k + b_k)$ und $f(x_k)$
- ▶ Setze

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k, & b_{k+1} &= x_k & \text{falls } f(x_k) f(a_k) \leq 0 \\ a_{k+1} &= x_k, & b_{k+1} &= b_k & \text{sonst.} \end{aligned}$$



Beispiel 5.21.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Bisektion (vgl. Beispiel 5.7.).

Die Bisektion mit den Startwerten $a_0 = 1$ und $b_0 = 2$ liefert:

k	a_k	b_k	x_k	$b_k - a_k$	$f(x_k)$
0	1.00000	2.00000	1.50000	1.00000	8.89062
1	1.00000	1.50000	1.25000	0.50000	1.56470
2	1.00000	1.25000	1.12500	0.25000	-0.09771
3	1.12500	1.25000	1.18750	0.12500	0.61665
4	1.12500	1.18750	1.15625	0.06250	0.23327
5	1.12500	1.15625	1.14062	0.03125	0.06158
6	1.12500	1.14062	1.13281	0.01562	-0.01958
7	1.13281	1.14062	1.13672	0.00781	0.02062
8	1.13281	1.13672	1.13477	0.00391	0.00043
9	1.13281	1.13477	1.13379	0.00195	-0.00960

Zusammenfassung

- ▶ **Nullstellenproblem** $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ **Fixpunktproblem** $\Phi(x) = x$.
Es gibt **viele** Möglichkeiten für Φ , zum Beispiel:
für invertierbare Matrix M_x : $\Phi(x) = x - M_x f(x)$.

- ▶ **Fixpunktiteration:**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

- ▶ **Banachscher Fixpunktsatz:**

$$\Phi : E \rightarrow E \quad (\text{Selbstabbildung})$$

Φ Kontraktion auf E

hinreichende Bedingung für Konvergenz der Fixpunktiteration.

- ▶ $n = 1$ (skalares Problem): **geometrische Darstellung** der Fixpunktiteration.

Zusammenfassung

- ▶ **Konvergenzordnung**: Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit
- ▶ Methode für skalare Nullstellenprobleme: Bisektion
⇒ nächste Vorlesung mehr.

Verständnisfragen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n;$$

$$x^* \in \mathbb{R}^n, \text{ so dass } f(x^*) = 0.$$

- f** Für alle Gleichungssysteme der Form $f(x^*) = 0$ gibt es keine analytische Lösung.
- w** Die Lösung x^* eines nichtlinearen Gleichungssystems ist im allgemeinen nicht eindeutig.
- f** Die Kondition des skalaren nichtlinearen Problems ist unabhängig von der Vielfachheit der Nullstelle.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x .

f Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in $\mathbb{R}$.

w Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf $E = [-1, 0]$ erfüllt.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf $E = [0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. **0.5**

Verständnisfragen

Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = |x|^{2.5} - 3$.

W f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $[0, \infty)$.

W Die Bisektionsmethode, mit den Startwerten $a_0 = -1$ und $b_0 = 2$ konvergiert gegen eine Nullstelle.