Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Nichtlineare Gleichungssysteme III

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

- Nullstellenproblem $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$.
  Es gibt viele Möglichkeiten für Φ, zum Beispiel:
  für invertierbare Matrix M_x: $\Phi(x) = x - M_x f(x)$.
- Fixpunktiteration:
  $$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$
- Banachscher Fixpunktsatz:
  $$\Phi : E \to E \qquad \text{(Selbstabbildung)}$$
  $$\Phi \text{ Kontraktion auf } E$$
  hinreichende Bedingung für Konvergenz der Fixpunktiteration.
- $n = 1$ (skalares Problem): geometrische Darstellung der Fixpunktiteration.
- Konvergenzordnung: Maß für Konvergenzgeschwindigkeit eines iterativen Verfahrens.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

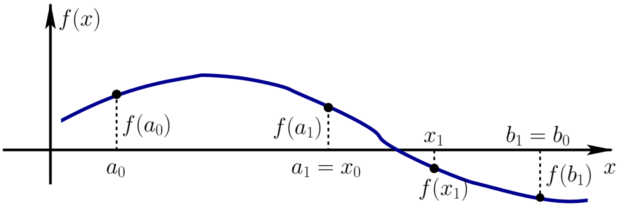
Bisektion

Gegeben $a_0 < b_0$ mit $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

Für $k = 0, 1, 2, \dots$ berechne:

- $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ und $f(x_k)$
- Setze

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k, \quad b_{k+1} = x_k \quad \text{falls } f(x_k) \cdot f(a_k) \leq 0 \\ a_{k+1} &= x_k, \quad b_{k+1} = b_k \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$



Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 5.4/5.6

- Banachscher Fixpunktsatz: Fehlerschätzung
- Methoden für skalare Gleichungen
- Das Newton-Verfahren für Systeme
  - Methode
  - Konvergenzeigenschaften

Was Sie mitnehmen sollten:

- Spezielle Methoden für skalare Gleichungen
- Wie funktioniert das allgemeine Newton-Verfahren
- Eigenschaften des Newton-Verfahrens

Konvergenzordnung

Ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge ist der Begriff der Konvergenzordnung.

Definition 5.14.

Eine konvergente Folge

$$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$$

mit Grenzwert x^* hat die Konvergenzordnung p, falls für ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\,\|x_k - x^*\|^p \quad \text{für alle } k \geq k_0,$$

wobei

$$0 < c < 1 \quad \text{falls} \quad p = 1.$$

Fehlerschätzung für skalare Folgen

Es gelte $e_k := x^* - x_k$ und $A_k := \dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$

Lemma 5.17.

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x^*.

Aus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = A \in (-1, 1), \quad A \neq 0,$$

folgt, dass die Konvergenzordnung der Folge genau 1 ist und

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{A_k}{1-A_k}(x_k - x_{k-1})}{e_k} = 1.$$

Wenn die Folge die Konvergenzordnung $p > 1$ hat, gilt

$$\lim_{k\to\infty} (x_{k+1} - x_k)/e_k = 1.$$

Fehlerschätzung für skalare Folgen

Es ergeben sich einfache a-posteriori-Fehlerschätzungen (für k hinreichend groß) aus den Resultaten in Lemma 5.17.:

$$p = 1 \,:\, x^* - x_k \approx \frac{A_k}{1 - A_k}(x_k - x_{k-1}),$$

wobei $A_k = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$ etwa konstant sein sollte.

$$p > 1 \,:\, x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k.$$

Beachte:

Für $p = 1$ (lineare Konvergenz) ist

$$|x_k - x_{k-1}| \quad \text{oder} \quad |x_{k+1} - x_k|$$

meist keine sinnvolle Schätzung der Größe des Fehlers $|x^* - x_k|$.

Beispiel 5.18.

Für die Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \Phi_2(x_k) = (x+1)^{\frac{1}{6}}$$

aus Beispiel 5.7 ergibt sich für $x_0 = 0.5$:

k	x_k	A_k	$x_k - x_{k-1}$	$\frac{A_k(x_k - x_{k-1})}{1-A_k}$	$x^* - x_k$
0	0.500000000000	-	-	-	6.35e-01
1	1.069913193934	-	5.70e-01	-	6.48e-02
2	1.128908359044	0.1035161	5.90e-02	6.81e-03	5.82e-03
3	1.134208317737	0.0898372	5.30e-03	5.23e-04	5.16e-04
4	1.134678435924	0.0887022	4.70e-04	4.58e-05	4.57e-05
5	1.134720089466	0.0886023	4.17e-05	4.05e-06	4.05e-06
6	1.134723779696	0.0885934	3.69e-06	3.59e-07	3.59e-07
7	1.134724106623	0.0885926	3.27e-07	3.18e-08	3.18e-08
8	1.134724135586	0.0885926	2.90e-08	2.82e-09	2.82e-09
9	1.134724138152	0.0885926	2.57e-09	2.49e-10	2.49e-10
10	1.134724138379	0.0885925	2.27e-10	2.21e-11	2.21e-11

Fehlerschätzung für Vektorfolgen

Lemma 5.19.

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}^n$ mit Grenzwert x^* und Konvergenzordnung $p > 1$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|e_k\|} = 1.$$

Aus diesem Resultat ergibt sich folgende Fehlerschätzung:

$$p > 1 : \|x_k - x^*\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|, \quad \text{für } k \text{ genügend groß.}$$

Es sei bemerkt, dass im skalaren Fall der Fehler e_k und im vektoriellen Fall die Größe des Fehlers, $\|e_k\|$, geschätzt wird.

Methode für skalare Gleichungen: Newton-Verfahren

Ziel: Konstruiere Φ so, dass die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ möglichst schnell konvergiert.

Ansatz:

- Setze $\Phi(x) = x - M_x f(x)$, wobei hier $M_x = g(x)$ (skalar).
- Wähle $g(x)$ so, dass $\Phi'(x^*) = 0$.

Es gilt: $$\Phi'(x^*) = 0 \iff g(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)},$$

und daraus folgt $$\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Newton-Verfahren

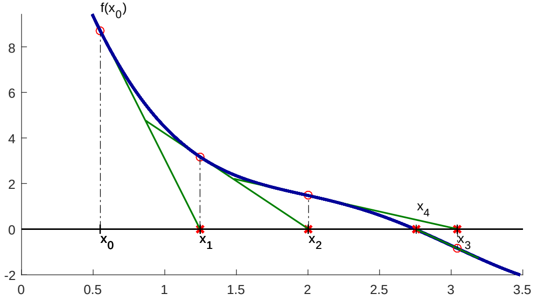
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Geometrische Herleitung des Newton-Verfahrens

Es gilt $$f(x) = \underbrace{f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)}_{=:T(x)} + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 f''(\xi_k)$$

$T(x)$ entspricht der Tangente von f bei x_k. So gilt dann

$$T(x_{k+1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$



Konvergenz Newton-Verfahren

Satz 5.22.

Sei f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung $U = (a, b)$ von x^*, und es gelte

$$\begin{aligned} f(x^*) &= 0, \\ f'(x) &\neq 0 \text{ für alle } x \in U. \end{aligned}$$

Für $x_k \in U$ und

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

gilt

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2, \quad \xi_k \in U.$$

Also ist das Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergent.

Beispiel 5.23.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Newton-Verfahrens (vgl. Beispiel 5.7 & 5.21).

Die Newton-Iteration $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^6 - x_k - 1}{6\,x_k^5 - 1}$ liefert:

k	x_k with $x_0 = 0.5$	x_k with $x_0 = 2$	$x_{k+1} - x_k$ with $x_0 = 2$
0	0.50000000000000	2.00000000000000	-3.19e-01
1	-1.32692307692308	1.68062827225131	-2.50e-01
2	-1.10165080870249	1.43073898823906	-1.76e-01
3	-0.92567640260338	1.25497095610944	-9.34e-02
4	-0.81641531662254	1.16153843277331	-2.52e-02
5	-0.78098515830640	1.13635327417051	-1.62e-03
6	-0.77810656986872	1.13473052834363	-6.39e-06
7	-0.77808959926268	1.13472413850022	-9.87e-11
8	-0.77808959867860	1.13472413840152	0.00e+00
9	-0.77808959867860	1.13472413840152	-

Beispiel 5.24.: Babylonisches Wurzelziehen ca. 1750 v. Chr.

Man berechne $\sqrt{a}$ für ein $a > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Die Wurzel $\sqrt{a}$ von a löst $f(x) := x^2 - a = 0$.
Das Newton-Verfahren ist also die Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2\,x_k} = \frac{x_k}{2} + \frac{a}{2\,x_k}\,.$$

Verfahren liefert für $a = 2$ die Resultate:

	x_k	$x_{k+1} - x_k$	$\sqrt{2} - x_k$
0	100.00000000000000	-5.00e+01	-9.86e+01
1	50.01000000000000	-2.50e+01	-4.86e+01
2	25.02499600079984	-1.25e+01	-2.36e+01
3	12.55245804674590	-6.20e+00	-1.11e+01
4	6.35589469493114	-3.02e+00	-4.94e+00
5	3.33528160928043	-1.37e+00	-1.92e+00
6	1.96746556223115	-4.75e-01	-5.53e-01
7	1.49200088968972	-7.58e-02	-7.78e-02
8	1.41624133203894	-2.03e-03	-2.03e-03
9	1.41421501405005	-1.45e-06	-1.45e-06
10	1.41421356237384	-	-7.45e-13

Beispiel 5.24.: Globale Konvergenz

Kontraktion

- $\Phi : (\sqrt{a/2}, \infty) \to (\sqrt{a/2}, \infty)$ ist Lipschitz mit $L = \frac{1}{2}$, da

$$|\Phi'(x)| = \left| \frac{1}{2} - \frac{a}{2\,x^2} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Selbstabbildung

- $\Phi : [\sqrt{a}, \infty) \to [\sqrt{a}, \infty)$ ist eine Selbstabbildung

Banach $\Rightarrow$ Es gibt genau ein $x^* \in [\sqrt{a}, \infty)$ mit

$$x^* = \Phi(x^*) = \frac{x^*}{2} + \frac{a}{2\,x^*} \quad \text{also} \quad x^* = \sqrt{a}.$$

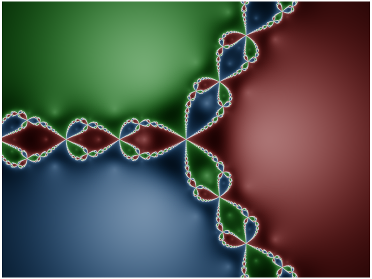
- Für $x_0 \in (0, \sqrt{a})$ folgt sofort $x_1 = \Phi(x_0) \geq \sqrt{a}$.

Damit ist das Newtonverfahren global konvergent auf $(0, \infty)$.

Konvergenzverhalten des Newton-Verfahren und Demos

Matlab-Demo

- Im Allgemeinen
  nur lokale Konvergenz
- Manchmal globale Konvergenz
- Lokale quadratische Konvergenz
- Endlose Iteration möglich
- Divergenz kann auftreten



Konvergenzbereich für komplexes Polynom $z^3 - 1$.

Merke:

- Quadratische Konvergenz nur lokal
- Guter Startwert ist wichtig
  z.B. Bisektionsverfahren bei einfachen Nullstellen

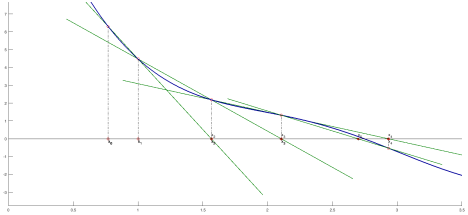
Methode für skalare Gleichungen: Sekanten-Verfahren

Idee:

- Ersetze Tangente $T(x)$ im Newton-Verfahren durch Sekante

$$S(x) = f(x_k)\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} + f(x_{k-1})\frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}}\,.$$

- Nullstelle der Sekante ergibt neue Annäherung x_{k+1}



Der Sekantenanstieg

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

entspricht gerade $f'(x_k)$ im Newton-Verfahren.

Sekanten-Verfahren

Sekanten-Verfahren

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}\, f(x_k) - x_k\, f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$= x_k - f(x_k) \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right)$$

Vorteile gegenüber Newton-Verfahren

- Berechnung der Ableitung $f'(x)$ wird vermieden.
- Effizienter, wenn Auswertung von $f'(x)$ und $f(x)$ etwa gleich teuer.

Nachteile gegenüber Newton-Verfahren

- Konvergenzordnung lokal $p \approx 1.6$.
- Verfahren benötigt zwei Startwerte.

Beispiel 5.26.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [1, 2]$ der Funktion

$$f(x) = x^6 - x - 1$$

mittels Sekanten-Verfahren (vgl. Beispiel 5.7, 5.21 & 5.23).

Das Sekanten-Verfahren mit den Startwerten $x_0 = 2$ und $x_1 = 1$:

k	x_k	$x_{k+1} - x_k$
0	2.00000000000000	-1.00e+00
1	1.00000000000000	1.61e-02
2	1.01612903225806	1.74e-01
3	1.19057776867664	-7.29e-02
4	1.11765583094155	1.49e-02
5	1.13253155021613	2.29e-03
6	1.13481680800485	-9.32e-05
7	1.13472364594870	4.92e-07
8	1.13472413829122	1.10e-10
9	1.13472413840152	-

Die Werte in der dritten Spalte ergeben eine Fehlerabschätzung.

Newton-Verfahren für Systeme

Aufgabe

Sei $f = (f_1, \dots, f_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (für $n > 1$) eine zweimal stetig differenzierbare vektorwertige Funktion.
Bestimme

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n, \text{ so dass } f(x^*) = 0$$

erfüllt ist.

- Notation: Bezeichne die Lösung am Iterationsschritt k mit

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T \in \mathbb{R}^n.$$

- Zur Erinnerung: Taylor-Entwicklung (für $i = 1, 2, \dots, n$)

$$f_i(x) = f_i(x^k) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} (x_j - x_j^k) + \mathcal{O}\left(\|x - x^k\|_2^2\right)$$

Das Newton-Verfahren für Systeme

- Taylor-Entwicklung kompakt

$$f(x) = f(x^k) + f'(x^k)\,(x - x^k) + \mathcal{O}\left(\|x - x^k\|_2^2\right),$$

wobei die Jacobi-Matrix gegeben ist durch

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

- Für die Nullstelle x^{k+1} der linearen Näherung von f in x^k folgt (vgl. Tangente)

$$0 = f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k),$$

und hieraus erhält man

$$x^{k+1} = x^k - \left(f'(x^k)\right)^{-1} f(x^k).$$

Das Newton-Verfahren für Systeme

Algorithmus 5.28. (Newton-Iteration)

Gegeben: Startwert x^0.

Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. Berechne $f(x^k)$ und $f'(x^k)$
2. Löse das lineare Gleichungssystem in s^k
$$f'(x^k)\, s^k = -f(x^k).$$
3. Setze (Newton-Korrektur)
$$x^{k+1} = x^k + s^k$$

Beachte

- Schritt 2 erfordert die Lösung eines $n \times n$ linearen Gleichungssystems $\Rightarrow$ LR-Zerlegung.
- Die Inverse von $f'(x^k)$ wird nicht explizit berechnet.

Beispiel 5.29.

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 6x_1 - \cos x_1 - 2\,x_2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 8x_2 - x_1 x_2^2 - \sin x_1 = 0 \end{aligned}$$

Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x^0 = (0,0)^T$ durch.

- Berechnung der Jacobi-Matrix

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 6 + \sin x_1 & -2 \\ -x_2^2 - \cos x_1 & 8 - 2\,x_1\,x_2 \end{pmatrix}.$$

- Berechnung von $f(x^0)$ und $f'(x^0)$

$$f(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(x^0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5.29.

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 6x_1 - \cos x_1 - 2\,x_2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) &= 8x_2 - x_1 x_2^2 - \sin x_1 = 0 \end{aligned}$$

Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x^0 = (0, 0)^T$ durch.

- Berechnung der Newton-Korrektor s^0 aus

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s^0 = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Berechnung von x^1 ergibt schließlich

$$x^1 = x^0 + s^0 = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 5.31.

Annahmen:

- Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex
- Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar
- Jacobi-Matrix $f'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
  - invertierbar
  $$\det(f'(x)) \neq 0, \quad \text{für alle } x \in \Omega$$
  - die Inverse beschränkt durch eine Konstante β
  $$\|(f'(x))^{-1}\| \leq \beta \text{ für alle } x \in \Omega.$$
  - Lipschitz-stetig auf Ω mit einer Konstanten γ
  $$\|f'(x) - f'(y)\| \leq \gamma \, \|x - y\|, \quad x, y \in \Omega.$$
- Es existiere eine Lösung x^* von $f(x) = 0$ in Ω.

Satz 5.31.

Der Startwert x^0 erfülle

$$x^0 \in K_\omega(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad \|x^* - x\| < \omega\}$$

mit ω hinreichend klein, so dass $K_\omega(x^*) \subset \Omega$ und

$$\omega \leq \frac{2}{\beta\,\gamma}.$$

Dann gilt für die durch das Newton-Verfahren definierte Folge

$$\left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty} \subset K_\omega(x^*)$$

und sie **konvergiert quadratisch** gegen x^* :

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\beta\,\gamma}{2}\,\|x^k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zusammenfassung

- Fehlerschätzung hängt von p (Konvergenzordnung) ab.
  Skalare Folgen : einfache Formeln $p = 1$, $p > 1$
  Vektorfolgen : einfache Formel nur für $p > 1$.

- Methoden für skalare Probleme $f(x) = 0$:
  Bisektion, Newton-Verfahren, Sekanten-Verfahren.

- Newton-Verfahren:
  - Konvergenzordnung: $p = 2$
  - lokale Konvergenz

Verständnisfragen

Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = |x|^{2.5} - 3$.

w f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $[0, \infty)$.

f Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*, und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge.
Es gilt $|x_k - x^*| \approx (x_k - x_{k+1})^2$ für k hinreichend groß.

w Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen eine Nullstelle.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt.
Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.
Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.

Es seien $n = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
Bestimmen Sie $\Phi'(x^*)$. $\boxed{0}$

$\boxed{\text{w}}$ Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det M \neq 0$, und $\Phi(x) := x - Mf(x)$. Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ hat dieselbe Lösungen wie das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$.