Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Nichtlineare Ausgleichsrechnung II / Interpolation I

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Nichtlineares Ausgleichsproblem

Gegeben $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, bestimme $x^* \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$x^* \in \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2.$$

$Ax - b$

Ansatz:

1. Ersetze $F(x)$ durch lineare Approximation (Taylor-Entwicklung)
2. Schrittweise Annäherung an x^* durch Lösung linearer Probleme in jedem Schritt

Zur Erinnerung:

- Wir bezeichnen die Lösung am Iterationsschritt k mit

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T \in \mathbb{R}^n.$$

- Taylor-Entwicklung

$$F(x) = F(x^k) + F'(x^k)\,(x - x^k) + \mathcal{O}(\|x - x^k\|_2^2).$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Algorithmus 6.3. (Gauß-Newton)

Wähle Startwert x^0.
Für $k = 0, 1, 2, \dots$:

1. Berechne $F(x^k), F'(x^k)$.
2. Finde s^k, so dass
$$s^k \in \arg\min_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(x^k)\, s + F(x^k)\|_2$$
3. Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.

Beachte

- Schritt 2 erfordert die Lösung eines linearen Ausgleichsproblems (Normalgleichung, QR-Zerlegung, SVD)
- Falls $F'(x)$ nicht vollen Rang hat, hat das Ausgleichsproblem keine eindeutige Lösung. $\rightarrow$ Wähle s^k mit minimaler 2-Norm.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Gauss-Newton mit $\operatorname{Rang} F'(x) = n$ ist Fixpunktiteration mit

$$\Phi(x) = x - [F'(x)^T F'(x)]^{-1} F'(x)^T F(x).$$

Lokale Konvergenz um $x^* = \Phi(x^*)$ hängt von $\rho(K)\,\|F(x^*)\|_2$, wobei

$$K := A^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{F_i(x^*)}{\|F(x^*)\|_2} F_i''(x^*) \right) A^{-1}$$

und $A^2 = F'(x^*)^T F'(x^*)$.

- Falls x^* lokales Maximum oder Sattelpunkt von $\phi := \frac{1}{2}\|F\|_2^2$, gilt immer $\rho(K)\,\|F(x^*)\|_2 \geq 1$, also abstoßend.
- Falls x^* lokales Minima mit $\rho(K)\,\|F(x^*)\|_2 < 1$, dann lokale Konvergenz
- Falls x^* lokales Minima mit $\rho(K)\,\|F(x^*)\|_2 > 1$, dann abstoßend

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 6.3/8.1-8.3

- Levenberg-Marquardt-Verfahren

Kapitel 8: Interpolation

- Lagrange-Interpolationsaufgabe
- Effiziente Auswertung des Interpolationspolynoms
- Unterschiedliche Darstellungen des Interpolationspolynoms

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie funktioniert das Levenberg-Marquardt-Verfahren?
- Wichtige Eigenschaften eines Interpolationspolynoms
- Effiziente Auswertung eines Interpolationspolynoms
- Möglichkeiten zur Darstellung eines Interpolationspolynoms

Levenberg-Marquardt-Verfahren

Ziel: Lösen von nichtlinearen Ausgleichsproblemen ohne der Rangbedingung

$$\mathbf{Rang}(F'(x^k)) = n\,.$$

Zur Erinnerung: Berechnung der Korrektur (bzw. Schrittweite) beim Gauß-Newton-Verfahren über die Normalgleichung:

$$F'(x^k)^T\,F'(x^k)\,s^k = -F'(x^k)^T\,F(x^k)$$

Idee: Einführung einer „Regularisierung"

$$\left[F'(x^k)^T\,F'(x^k) + \mu^2\,I\right]\,s^k = -F'(x^k)^T\,F(x^k),$$

wobei $\mu > 0$ ein zu wählender Parameter ist.

Bemerkungen

Lineares Ausgleichsproblem (Gauß-Newton)

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| F'(x^k)\, s + F(x^k) \right\|_2$$

wird ersetzt durch

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left(\|F'(x^k)\, s + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \|s\|_2^2 \right),$$

oder, äquivalent,

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix}}_{A} s + \underbrace{\begin{pmatrix} F(x^k) \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} \right\|_2 .$$

$$\underbrace{A^T A}\, s + A^T b = 0$$

$$\left(F'(x^k)^T \;\; \mu I \right) \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} = F'(x^k)^T F'(x^k) + \mu^2 I$$

Bemerkungen

Lineares Ausgleichsproblem (Gauß-Newton)

$$\min_{s\in\mathbb{R}^n} \left\| F'(x^k)\, s + F(x^k) \right\|_2$$

wird ersetzt durch

$$\min_{s\in\mathbb{R}^n} \left(\|F'(x^k)\, s + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \, \|s\|_2^2 \right),$$

oder, äquivalent,

$$\min_{s\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu\, I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

Neue Annäherung: $\quad x^{k+1} = x^k + s^k$

Großer Vorteil: Die Matrix $\begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix}$ hat immer vollen Rang.

Bemerkungen

Weitere günstige Eigenschaft

Es gilt

$$\|s^k\|_2 \leq \frac{\|F(x^k)\|_2}{\mu},$$

d.h. μ groß $\Rightarrow$ Korrektur s^k klein.

Die Methode erlaubt eine Dämpfungsstrategie.

$$\mu^2 \|s^k\|_2^2 \leq \|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \|s^k\|_2^2$$

$s=0$

$$= \min_{s \in \mathbb{R}^n} \left(\|F'(x^k)s + F(x^k)\|_2^2 + \mu \|s\|_2^2 \right) \leq \|F(x^k)\|_2^2$$

Bemerkungen

Weitere günstige Eigenschaft

Es gilt

$$\|s^k\|_2 \leq \frac{\|F(x^k)\|_2}{\mu},$$

d.h. μ groß $\Rightarrow$ Korrektur s^k klein.

Die Methode erlaubt eine Dämpfungsstrategie.

- Wahl der Korrektur in der Praxis heuristisch
  basierend auf Residuum $\|F(x^k)\|_2^2 - \|F(x^k + s^k)\|_2^2$
- Levenberg-Marquardt-Verfahren kann auch als Fixpunktiteration formuliert werden

  $$\Phi_\mu(x) = x - [F'(x)^T F'(x) + \mu^2 I]^{-1} \nabla\phi(x).$$

  Konvergenzordnung ist 1, wie bei der Gauß-Newton-Methode.
  Geeignete Wahl von μ: Einzugsbereich wird vergrößert.

Levenberg-Marquardt-Methode

Algorithmus 6.10. (Levenberg-Marquardt)

Wähle Startwert x^0 und Anfangswert für den Parameter μ.

Für $k = 0, 1, 2, \dots$:

1. Berechne $F(x^k)$, $F'(x^k)$
2. Löse das lineare Ausgleichsproblem
$$s^k = \arg\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 .$$
3. Teste, ob die Korrektur s^k akzeptabel ist, durch Betrachtung von Residuen. Wenn nein, dann wird μ vergrößert und Schritt 2 wiederholt.
4. Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.
5. Falls bestimmte Kriterien (Residuen) erfüllt sind, wird μ verkleinert.

	linear	$\rightarrow$	nichtlinear	Verfahren
Gleichung	$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x, b \in \mathbb{R}^n$ $A\,x = b$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = A\,x - b = 0$	$\rightarrow$	$f\ :\ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $f(x) = 0$	$f(x) \approx f(x^k) + f'(x^k)\,(x - x^k) \overset{!}{=} 0$ Newton-Verfahren: $f'(x^k)\,s^k = -f(x^k)$ $x^{k+1} = x^k + s^k$
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$
Ausgleich	$A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ x \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m$ $\|A\,x - b\| \rightarrow \min$ genauer $x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|$	$\rightarrow$	$F\ :\ \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\|F(x)\| \rightarrow \min$ genauer $x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|$	$F(x) \approx F(x^k) + F'(x^k)\,(x - x^k)$ Gauß-Newton-Verfahren $s^k = \arg\min_{s\in\mathbb{R}^n} \|F'(x^k)\,s + F(x^k)\|$ $x^{k+1} = x^k + s^k$

Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird an Stelle des s^k's des Gauß-Newton-Verfahren

$$s^k = \arg\min_{s\in\mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu\, I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

verwendet.

Verständnisfragen

Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$.

Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem:

Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

$\boxed{w}$ Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Matrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.

$\boxed{f}$ Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.

Interpolation

Kapitel 8:

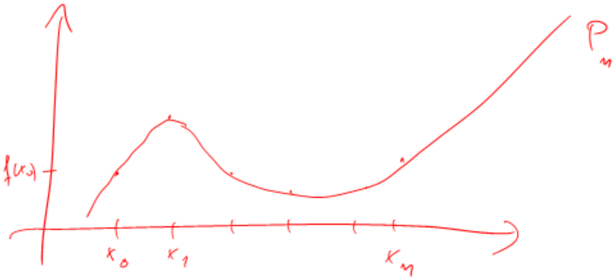
Interpolation

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$



Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

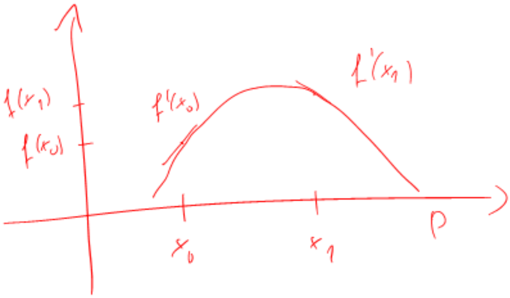
$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Bemerkungen

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j \, x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$



f(x1)
f(x0)
f'(x0)
f'(x1)
x0
x1
p

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Bemerkungen

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

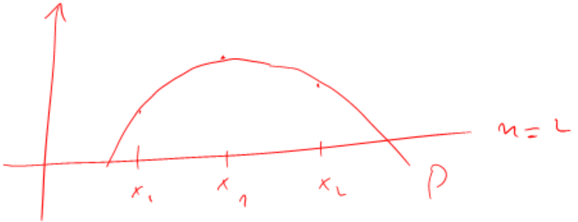
$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j \, x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- "Lagrange": Interpolation der Funktionswerte.
- Weitere Möglichkeiten:
  - Hermite-Interpolation: zusätzlich Interpolation der Ableitungen.
  - Trigonometrische Interpolation, Spline-Interpolation, ...

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?
- Wie können wir den Fehler reduzieren?

Wichtig für: Numerische Differentiation, Integration, Computergraphik und viele weitere Anwendungen...



$Q, P \in \Pi_n$ mit $Q(x_j) = P(x_j) = f(x_j)$ $\quad j = 0, \dots, n$

$\Rightarrow \underbrace{(Q-P)}_{\in \Pi_n}(x_j) = 0 \quad j = 0, \dots, n$

$\Rightarrow Q-P$ hat $n+1$ Nullstellen

$\Rightarrow Q-P = 0$

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\,\ell_{jn}(x)$$

$\ell_{jn}(x_j) = 1$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

$\ell_{jn}(x_k) = 0$
$k \neq j$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

$$\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} \frac{1}{j-k} = \prod_{k=0}^{j-1}\frac{1}{j-k}\prod_{k=j+1}^{m}\frac{1}{j-k} = \underbrace{\prod_{l=1}^{j}\frac{1}{l}}_{j!}\,(-1)^{m-j}\,\underbrace{\prod_{l=1}^{m-j}\frac{1}{l}}_{(m-j)!}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome

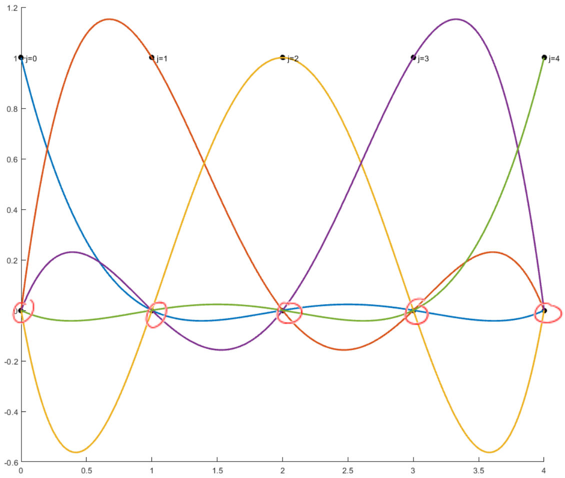
Für den Fall äquidistanter Stützstellen

$$x_j = x_0 + j\,h, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

gilt $\hat{\ell}_{jn}(k) = \ell_{jn}(x_k)$

$$\begin{aligned}
\hat{\ell}_{jn}(t) := \ell_{jn}(x_0 + t\,h) &= \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x_0 + t\,h - (x_0 + k\,h)}{x_0 + j\,h - (x_0 + k\,h)} \\
&= \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{(t-k)}{(j-k)} \\
&= \frac{(-1)^{n-j}}{j!\,(n-j)!} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} (t-k).
\end{aligned}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome



$n = 4$

$\hat{\ell}_{j4}(t)$

$t \in [0, 4]$

Existenz und Eindeutigkeit

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \dots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms ergibt sich folgende Eigenschaft:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ gilt

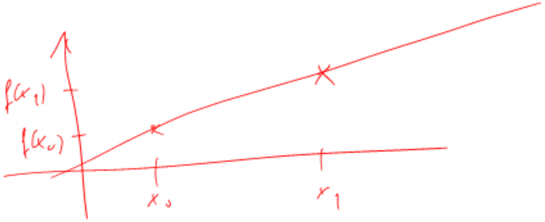
$$P(Q|x_0, \dots, x_n) = Q.$$

Begründung: Q interpoliert sich selbst und muss wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein.

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) \end{aligned}$$

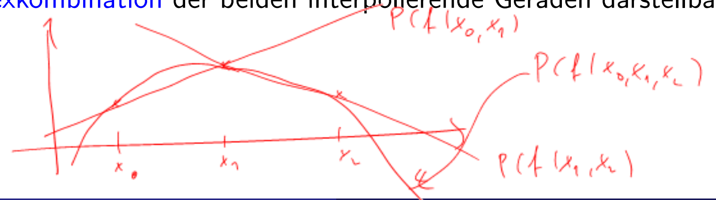


Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) \end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als Konvexkombination der beiden interpolierende Geraden darstellbar,



Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) \\ &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_0} f(x_0) \end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als Konvexkombination der beiden interpolierende Geraden darstellbar,

$$P(f|x_0,x_1,x_2)(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} P(f|x_1,x_2)(x) + \frac{x_2-x}{x_2-x_0} P(f|x_0,x_1)(x)$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x).$$

Die Interpolierende an den Stellen $\{x_0,\ldots,x_n\}$ ist eine Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades an den Stellen $\{x_1,\ldots,x_n\}$ und $\{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$, die jeweils Teilmengen der Gesamtstützstellenmenge sind.

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x).$$

- Wir setzen für festes x

$$P_{i,k} := P(f|x_{i-k},\dots,x_i)(x), \quad 0 \le k \le i \le n,$$

d.h. speziell

$$\begin{aligned} P_{n,n} &= P(f|x_0,\dots,x_n)(x), \\ P_{i,0} &= P(f|x_i)(x) = f(x_i). \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x).$$

Lemma 8.6. ergibt dann das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x-x_{i-k}}{x_i-x_{i-k}}P_{i,k-1} + \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-k}}P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-k}}\left(P_{i,k-1}-P_{i-1,k-1}\right) \end{aligned}$$

$i = n$
$k = n$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Gegeben: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$

Gesucht: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \ldots & & \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
x_3 & f(x_3) & P_{3,1} & P_{3,2} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \ldots & \ldots & P_{n,n}
\end{array}
$$

Beachte:

$P_{n,n}$ wird ausgewertet

ohne explizite Darstellung von $P(f|x_0, \ldots, x_n)$.

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$		

$$P_{11} = \frac{0,5-0}{1-0} 4 + \frac{1-0,5}{1-0} 1$$

$$= 2 + \frac{1}{2}$$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$P_{1,1} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} P_{1,0} + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} P_{0,0}$$

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$P_{2,1} = \frac{0,5-1}{2-1} 2 + \frac{2-0,5}{2-1} 4 = -\frac{1}{2} 2 + \frac{3}{2} 4 = 5$$

$$P_{2,1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} P_{2,0} + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} P_{1,0}$$

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$P_{2,2} = \frac{0{,}5 - 0}{2 - 0} 5 + \frac{2 - 0{,}5}{2 - 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10}{8} + \frac{15}{8} = \frac{25}{8}$$

$$P_{2,2} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} P_{2,1} + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_0} P_{1,1}$$

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$\Longrightarrow P(f \mid 0, 1, 2)(0.5) = 3\tfrac{1}{8}$$

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
   - Neville-Aitken-Schema
2. Darstellung in geschlossener Form?
   $\rightsquigarrow$ Wahl einer Basis in $\mathbf{\Pi}_n$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung:

Mit der monomialen Basis $1,\ x, x^2, \ldots,\ x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n.$$

Die Bedingungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Das Gleichungssystem

$$V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

muss also zur Bestimmung der Koeffizienten a_i gelöst werden.

Die Kondition des Problems

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \to V_n^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wird durch die Konditionszahl $\kappa(V_n) = \|V_n\| \, \|V_n^{-1}\|$ beschrieben.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\| \, \|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.

  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.
- Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines linearen Gleichungssystems der Größe $(n+1) \times (n+1)$.

Beispiel 8.10.

Sei $h = 1/n$ und $x_i = 1 + i\,h, i = 0, 1, \ldots, n.$

Für diese Stützstellenverteilung hat die Vandermonde-Matrix eine Konditionszahl bzgl. der 2-Norm wie folgt:

n	4	6	8	10
$\kappa_2(V_n)$	4.1e+4	2.0e+7	1.1e+10	6.5e+12

Effiziente Methode zur Auswertung der Potenzform

Sei $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\Pi}_n$ ein Polynom, das in der Potenzform vorliegt, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$$

mit bekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Es gilt

$$p(x) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + \cdots + x\left(a_{n-1} + x\, a_n\right)\right)\right).$$

Algorithmus 8.12. (Horner-Schema)

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + x\, b_{k+1}$$

Dann ist $\quad p(x) = b_0.$

Der Rechenaufwand wird etwa halbiert.

Zusammenfasung

- Bei Levenberg-Marquardt:
  - Parameter μ zur Vergrößerung des Einzugbereichs.
  - Matrix $\begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix}$ hat Rang $= n$.
- Lagrange-Interpolationsaufgabe:
  Es gibt ein eindeutiges $P_n \in \Pi_n$, so dass
  $$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n$$
- Effiziente Auswertung an einer oder wenigen Stellen x:
  Neville-Aitken-Schema
- Darstellung in geschlossener Form: mehrere Möglichkeiten, abhängig von der Wahl einer Basis in Π_n.
- Horner-Schema: effiziente Auswertung von
  $$P(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n, \quad (a_0, \ldots, a_n \text{ gegeben})$$

Verständnisfragen

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms.

$\boxed{\text{w}}$ Das Polynom $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ ist eindeutig.

$\boxed{\text{f}}$ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \delta_n (x - x_n) + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ gilt für alle x.

Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(1) = 4$ und $f(2) = -3$.
Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1)(1.5)$. $\boxed{0.5}$

Verständnisfragen

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms.

$\boxed{\text{W}}$ Die Darstellung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem der Bestimmung der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.

$\boxed{\text{W}}$ Es gilt $P(Q \mid x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.