

Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Nichtlineare Ausgleichsrechnung II / Interpolation I

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Nichtlineares Ausgleichsproblem

Gegeben $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, bestimme $x^* \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$x^* \in \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2.$$

Ansatz:

1. Ersetze $F(x)$ durch lineare Approximation (Taylor-Entwicklung)
2. Schrittweise Annäherung an x^* durch Lösung linearer Probleme in jedem Schritt

Zur Erinnerung:

- ▶ Wir bezeichnen die Lösung am Iterationsschritt k mit

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T \in \mathbb{R}^n.$$

- ▶ Taylor-Entwicklung

$$F(x) = F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k) + \mathcal{O}(\|x - x^k\|_2^2).$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Algorithmus 6.3. (Gauß-Newton)

Wähle Startwert x^0 .

Für $k = 0, 1, 2, \dots$:

1. Berechne $F(x^k), F'(x^k)$.
2. Finde s^k , so dass

$$s^k \in \arg \min_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(x^k) s + F(x^k)\|_2$$

3. Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.

Beachte

- ▶ Schritt 2 erfordert die Lösung eines linearen Ausgleichsproblems (Normalgleichung, QR-Zerlegung, SVD)
- ▶ Falls $F'(x)$ nicht vollen Rang hat, hat das Ausgleichsproblem keine eindeutige Lösung. → Wähle s^k mit minimaler 2-Norm.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Gauss-Newton mit $\text{Rang } F'(x) = n$ ist **Fixpunktiteration** mit

$$\Phi(x) = x - [F'(x)^T F'(x)]^{-1} F'(x)^T F(x).$$

Lokale Konvergenz um $x^* = \Phi(x^*)$ hängt von $\rho(K) \|F(x^*)\|_2$, wobei

$$K := A^{-1} \left(\sum_{i=1}^m \frac{F_i(x^*)}{\|F(x^*)\|_2} F_i''(x^*) \right) A^{-1}$$

und $A^2 = F'(x^*)^T F'(x^*)$.

- ▶ Falls x^* **lokales Maximum** oder **Sattelpunkt** von $\phi := \frac{1}{2} \|F\|_2^2$, gilt immer $\rho(K) \|F(x^*)\|_2 \geq 1$, also **abstoßend**.
- ▶ Falls x^* **lokales Minima** mit $\rho(K) \|F(x^*)\|_2 < 1$, dann **lokale Konvergenz**
- ▶ Falls x^* **lokales Minima** mit $\rho(K) \|F(x^*)\|_2 > 1$, dann **abstoßend**

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 6.3/8.1-8.3

- ▶ Levenberg-Marquardt-Verfahren

Kapitel 8: Interpolation

- ▶ Lagrange-Interpolationsaufgabe
- ▶ Effiziente Auswertung des Interpolationspolynoms
- ▶ Unterschiedliche Darstellungen des Interpolationspolynoms

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie funktioniert das Levenberg-Marquardt-Verfahren?
- ▶ Wichtige Eigenschaften eines Interpolationspolynoms
- ▶ Effiziente Auswertung eines Interpolationspolynoms
- ▶ Möglichkeiten zur Darstellung eines Interpolationspolynoms

Levenberg-Marquardt-Verfahren

Ziel: Lösen von nichtlinearen Ausgleichsproblemen ohne der Rangbedingung

$$\text{Rang}(F'(x^k)) = n .$$

Zur Erinnerung: Berechnung der Korrektur (bzw. Schrittweite) beim Gauß-Newton-Verfahren über die Normalgleichung:

$$F'(x^k)^T F'(x^k) s^k = -F'(x^k)^T F(x^k)$$

Idee: Einführung einer „Regularisierung“

$$\left[F'(x^k)^T F'(x^k) + \mu^2 I \right] s^k = -F'(x^k)^T F(x^k),$$

wobei $\mu > 0$ ein zu wählender Parameter ist.

Bemerkungen

Lineares Ausgleichsproblem (Gauß-Newton)

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| F'(x^k) s + F(x^k) \right\|_2$$

wird **ersetzt** durch

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left(\|F'(x^k) s + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2 \|s\|_2^2 \right),$$

oder, **äquivalent**,

$$\min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2.$$

Neue Annäherung: $x^{k+1} = x^k + s^k$

Großer Vorteil: Die Matrix $\begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix}$ hat **immer vollen Rang**.

Bemerkungen

Weitere günstige Eigenschaft

Es gilt

$$\|s^k\|_2 \leq \frac{\|F(x^k)\|_2}{\mu},$$

d.h. μ groß $\Rightarrow$ Korrektur s^k klein.

Die Methode erlaubt eine Dämpfungsstrategie.

- ▶ Wahl der Korrektur in der Praxis heuristisch
basierend auf Residuum $\|F(x^k)\|_2^2 - \|F(x^k + s^k)\|_2^2$
- ▶ Levenberg-Marquardt-Verfahren kann auch als
Fixpunktiteration formuliert werden

$$\Phi_\mu(x) = x - [F'(x)^T F'(x) + \mu^2 I]^{-1} \nabla \phi(x).$$

Konvergenzordnung ist 1, wie bei der Gauß-Newton-Methode.

Geeignete Wahl von μ : Einzugsbereich wird vergrößert.

Levenberg-Marquardt-Methode

Algorithmus 6.10. (Levenberg-Marquardt)

Wähle Startwert x^0 und Anfangswert für den Parameter μ .

Für $k = 0, 1, 2, \dots$:

1. Berechne $F(x^k)$, $F'(x^k)$
2. Löse das lineare Ausgleichsproblem

$$s^k = \arg \min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2.$$

3. Teste, ob die Korrektur s^k akzeptabel ist, durch Betrachtung von Residuen. Wenn nein, dann wird μ vergrößert und **Schritt 2** wiederholt.
4. Setze $x^{k+1} = x^k + s^k$.
5. Falls bestimmte Kriterien (Residuen) erfüllt sind, wird μ verkleinert.

	linear	→	nichtlinear	Verfahren
Gleichung	$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, b \in \mathbb{R}^n$ $Ax = b$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = Ax - b = 0$	→	$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $f(x) = 0$	$f(x) \approx f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) \stackrel{!}{=} 0$ Newton-Verfahren: $f'(x^k)s^k = -f(x^k)$ $x^{k+1} = x^k + s^k$
↓	↓		↓	↓
Ausgleich	$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ $\ Ax - b\ \rightarrow \min$ genauer $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ Ax - b\ $	→	$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\ F(x)\ \rightarrow \min$ genauer $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ $	$F(x) \approx F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k)$ Gauß-Newton-Verfahren $s^k = \arg \min_{s \in \mathbb{R}^n} \ F'(x^k)s + F(x^k)\ $ $x^{k+1} = x^k + s^k$

Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird an Stelle des s^k 's des Gauß-Newton-Verfahren

$$s^k = \arg \min_{s \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

verwendet.

Verständnisfragen

Es sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$.

Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem:

Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

w Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Matrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.

f Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.

Interpolation

Kapitel 8:

Interpolation

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Bemerkungen

- ▶ Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- ▶ “Lagrange”: Interpolation der Funktionswerte.
- ▶ Weitere Möglichkeiten:
 - ▶ Hermite-Interpolation: zusätzlich Interpolation der Ableitungen.
 - ▶ Trigonometrische Interpolation, Spline-Interpolation, ...

Fragen

- ▶ Wie interpolieren wir?
 - ▶ Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- ▶ Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- ▶ Auswertung des Interpolationspolynoms
 - ▶ An einer oder wenigen Stellen?
 - ▶ Darstellung in geschlossener Form?
- ▶ Welchen Fehler machen wir?
- ▶ Wie können wir den Fehler reduzieren?

Wichtig für: Numerische Differentiation, Integration, Computergraphik und viele weitere Anwendungen. . .

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist **stets eindeutig lösbar**, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten **Lagrange-Fundamentalpolynome** sind.

Lagrange-Fundamentalpolynome

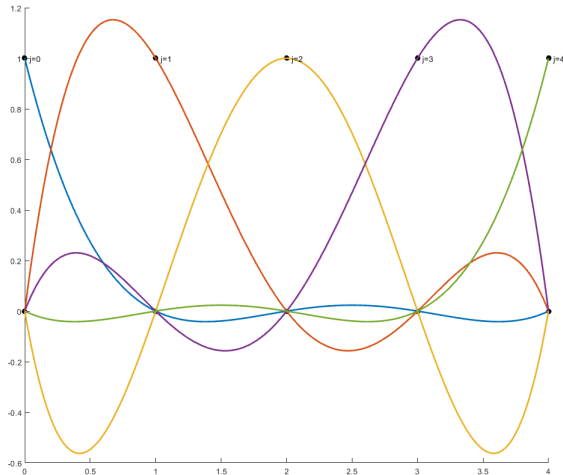
Für den Fall äquidistanter Stützstellen

$$x_j = x_0 + j h, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

gilt

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_{jn}(t) := \ell_{jn}(x_0 + t h) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x_0 + t h - (x_0 + k h)}{x_0 + j h - (x_0 + k h)} \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(t - k)}{(j - k)} \\ &= \frac{(-1)^{n-j}}{j! (n-j)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (t - k). \end{aligned}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome



$$n = 4$$

$$\hat{\ell}_{j4}(t)$$

$$t \in [0, 4]$$

Existenz und Eindeutigkeit

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \dots, x_n) := P_n$$

bezeichnet.

Aus der **Eindeutigkeit** des Interpolationspolynoms ergibt sich folgende Eigenschaft:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ gilt

$$P(Q|x_0, \dots, x_n) = Q.$$

Begründung: Q interpoliert sich selbst und muss wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein.

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?

- ▶ Neville-Aitken-Schema

2. Darstellung in geschlossener Form?

↪ Wahl einer Basis in Π_n .

- ▶ Potenzform
- ▶ Lagrange-Interpolationsformel
- ▶ Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als **Konvexkombination** der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$\begin{aligned}P(f|x_0, x_1)(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \\&= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0)\end{aligned}$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als **Konvexkombination** der beiden interpolierenden Geraden darstellbar,

$$\begin{aligned}P(f|x_0, x_1, x_2)(x) &= \\&\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} P(f|x_1, x_2)(x) + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_0} P(f|x_0, x_1)(x)\end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, \dots, x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x).$$

Die Interpolierende an den Stellen $\{x_0, \dots, x_n\}$ ist eine **Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades** an den Stellen $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, die jeweils Teilmengen der Gesamtstützstellenmenge sind.

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, \dots, x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x).$$

- Wir setzen für festes x

$$P_{i,k} := P(f|x_{i-k}, \dots, x_i)(x), \quad 0 \leq k \leq i \leq n,$$

d.h. speziell

$$P_{n,n} = P(f|x_0, \dots, x_n)(x),$$

$$P_{i,0} = P(f|x_i)(x) = f(x_i).$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6.(Aitken)

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f|x_1, \dots, x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x).$$

Lemma 8.6. ergibt dann das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Gegeben: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$

Gesucht: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$\dots$
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$P_{1,1}$		
x_2	$f(x_2)$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	
x_3	$f(x_3)$	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$
x_n	$f(x_n)$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	$\dots \dots P_{n,n}$

Beachte:

$P_{n,n}$ wird ausgewertet

ohne explizite Darstellung von $P(f|x_0, \dots, x_n)$.

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$.
Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der
Stelle $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

Fragen zur Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
 - ▶ Neville-Aitken-Schema
2. Darstellung in geschlossener Form?
 - ↪ Wahl einer Basis in Π_n .
 - ▶ Potenzform
 - ▶ Lagrange-Interpolationsformel
 - ▶ Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig:

Das Interpolationspolynom unter Punkt 2. ist immer das selbe!

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung:

Mit der **monomialen Basis** $1, x, x^2, \dots, x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Die Bedingungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n,$$

führt auf das **lineare Gleichungssystem**

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Das Gleichungssystem

$$V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

muss also zur Bestimmung der Koeffizienten a_i gelöst werden.

Die **Kondition** des Problems

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \rightarrow V_n^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wird durch die Konditionszahl $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ beschrieben.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- ▶ Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix $\kappa(V_n) = \|V_n\| \|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.
 $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.
- ▶ Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines linearen Gleichungssystems der Größe $(n+1) \times (n+1)$.

Beispiel 8.10.

Sei $h = 1/n$ und $x_i = 1 + i h, i = 0, 1, \dots, n$.

Für diese Stützstellenverteilung hat die Vandermonde-Matrix eine Konditionszahl bzgl. der 2-Norm wie folgt:

n	4	6	8	10
$\kappa_2(V_n)$	4.1e+4	2.0e+7	1.1e+10	6.5e+12

Effiziente Methode zur Auswertung der Potenzform

Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom, das **in der Potenzform vorliegt**, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit **bekannten** Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$. Es gilt

$$p(x) = a_0 + x \left(a_1 + x \left(a_2 + \cdots + x \left(a_{n-1} + x a_n \right) \right) \right).$$

Algorithmus 8.12. (Horner-Schema)

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + x b_{k+1}$$

Dann ist $p(x) = b_0$.

Der Rechenaufwand wird etwa halbiert.

Zusammenfassung

- ▶ Bei Levenberg-Marquardt:
 - ▶ Parameter μ zur Vergrößerung des Einzugsbereichs.
 - ▶ Matrix $\begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix}$ hat Rang $= n$.

- ▶ Lagrange-Interpolationsaufgabe:

Es gibt ein eindeutiges $P_n \in \Pi_n$, so dass

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n$$

- ▶ Effiziente Auswertung an einer oder wenigen Stellen x :
Neville-Aitken-Schema
- ▶ Darstellung in geschlossener Form: mehrere Möglichkeiten, abhängig von der Wahl einer Basis in Π_n .
- ▶ Horner-Schema: effiziente Auswertung von

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad (a_0, \dots, a_n \text{ gegeben})$$

Verständnisfragen

Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms.

w Das Polynom $P(f | x_0, \dots, x_n)$ ist eindeutig.

f $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = \delta_n (x - x_n) + P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ gilt für alle x .

Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(1) = 4$ und $f(2) = -3$.
Berechnen Sie $P(f | x_0, x_1)(1.5)$. **0.5**

Verständnisfragen

Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms.

- W Die Darstellung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem der Bestimmung der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.
- W Es gilt $P(Q \mid x_0, \dots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n .