Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Interpolation II

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Effiziente Auswertung mittels Neville-Aitken-Schema

Werten Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$\Longrightarrow P(f \mid 0,1,2)(0.5) = 3\tfrac{1}{8}$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom, das in der Potenzform vorliegt, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n$$

mit bekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Es gilt

$$p(x) = a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + \cdots + x\left(a_{n-1} + x\, a_n\right)\cdots\right)\right).$$

Algorithmus 8.12. (Horner-Schema)

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + x\, b_{k+1}$$

Dann ist

$$p(x) = b_0.$$

Der Rechenaufwand wird etwa halbiert.

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 8.1-8.3

- Lagrange-Interpolationsaufgabe
- Newtonsche Darstellung
- Fehleranalyse
- Numerische Differentiation

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie funktioniert die Newtonsche Interpolationsformel?
- Fehlerreduktion bei Interpolation:
  - Erhöhung Polynomgrad oder Stützstellenanzahl?
- Numerische Differentiation:
  - Wie macht man das und wie wählt man die Schrittweite?

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Annahme: Interpolationspolynom $P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt

Aufgabe: Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0,\ldots,x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0,\ldots,x_n)(x)$ aus $P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x) + \delta_n \underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Beachte:

- δ_n ist ein skalarer (fester) Wert.
- δ_n ist der Koeffizient der höchsten Potenz x^n.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.13

Für die Lagrange-Interpolationspolynome

$$P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) \in \Pi_{n-1}$$

und

$$P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x) \in \Pi_n$$

gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Da der Koeffizient δ_n von f und von den Stützstellen x_i abhängt, schreibt man auch

$$\delta_n =: [x_0, \dots, x_n]f.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.14

$\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]f$ ist offensichtlich der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n.

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ an und setzt $[x_0]f = f(x_0)$, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = {} & [x_0]f + (x - x_0) \cdot [x_0, x_1]f \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \cdot [x_0, x_1, x_2]f + \cdots \\ & + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \cdot [x_0, \ldots, x_n]f. \end{aligned}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkungen:

- Die Knotenpolynome

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &:= 1 \\ \omega_1(x) &:= (x - x_0) \\ &\vdots \\ \omega_n(x) &:= (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

bilden die Newtonsche Basis von Π_n.

- Für die Koeffizienten erhält man zum Beispiel

$$\delta_0 = [x_0]f = f(x_0)$$

$$\delta_1 = [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

bzw. verallgemeinert ...

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.16

Seien die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{[x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

Man nennt $[x_0, \ldots, x_n]f$ dividierte Differenz der Ordnung n.
Da $[x_i]f = f(x_i)$ erhält man das rekursive Schema

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & [x_i]f & & [x_i, x_{i+1}]f & & [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f & & [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f \\
\hline
x_0 & [x_0]f & & & & & & \\
 & & > & [x_0, x_1]f & & & & \\
x_1 & [x_1]f & & & > & [x_0, x_1, x_2]f & & \\
 & & > & [x_1, x_2]f & & & > & [x_0, x_1, x_2, x_3]f \\
x_2 & [x_2]f & & & > & [x_1, x_2, x_3]f & & \vdots \\
 & & > & [x_2, x_3]f & & \vdots & & \\
x_3 & [x_3]f & & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$	
$x_0 = 0$	1.000	
		$>$
$x_1 = 0.2$	0.9801	
		$>$
$x_2 = 0.4$	0.9211	
		$>$
$x_3 = 0.6$	0.8253	

$$[x_0, x_1] f = \frac{[x_1] f - [x_0] f}{x_1 - x_0} = \frac{0{,}9801 - 1}{0{,}2} = -0{,}0995$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \dots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$		
$x_0 = 0$	1.000		
		$>$	-0.0995
$x_1 = 0.2$	0.9801		
		$>$	-0.2950
$x_2 = 0.4$	0.9211		
		$>$	
$x_3 = 0.6$	0.8253		

$$\frac{0{,}9211 - 0{,}9801}{0{,}2}$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$		
$x_0 = 0$	1.000		
		> -0.0995	
$x_1 = 0.2$	0.9801		>
		> -0.2950	
$x_2 = 0.4$	0.9211		>
		> -0.4790	
$x_3 = 0.6$	0.8253		

$$[x_0, x_1, x_2]f = \frac{[x_1, x_2]f - [x_0, x_1]f}{x_2 - x_0} = \frac{-0{,}2950 + 0{,}0995}{0{,}4}$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
x_i & f(x_i) & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & \\
 & & > \text{-}0.0995 & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & > \text{-}0.4888 & \\
 & & > \text{-}0.2950 & & > 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & > \text{-}0.4600 & \\
 & & > \text{-}0.4790 & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0)(x) &= 1.000 \\
P(\cos x|0, 0.2)(x) &= 1.000\text{-}0.0995\, x \\
P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) &= 1.000\text{-}0.0995\, x\text{-}0.4888\, x\,(x - 0.2)
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$						
$x_0 = 0$	1.000						
		>	-0.0995				
$x_1 = 0.2$	0.9801			>	-0.4888		
		>	-0.2950			>	0.0480
$x_2 = 0.4$	0.9211			>	-0.4600		
		>	-0.4790				
$x_3 = 0.6$	0.8253						

$$
\begin{aligned}
&P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x) \\
&\quad = P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.0480\, x\,(x - 0.2)\,(x - 0.4) \\
&\quad = 1.000 - 0.0995\, x - 0.4888\, x\,(x - 0.2) \\
&\qquad + 0.0480\, x\,(x - 0.2)\,(x - 0.4).
\end{aligned}
$$

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h.

hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab

(konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

(ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \ldots, x_k]Q = 0$

(iii) Für die Newtonsche Basispolynome ω_k gilt

$$[x_0, \ldots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \text{ für } j, k = 0, \ldots, n.$$

(iv) Sei $a := \min_{0 \le i \le n} x_i$, $b := \max_{0 \le i \le n} x_i$,

$I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ hat unterschiedliche Darstellungen abhängig von der Wahl der Basis in Π_n:

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \ell_{jn}(x), \qquad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

2. monomiale Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j, \qquad V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

3. Newtonsche Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \ldots, x_j] f\, \omega_j(x),$$ Knotenpolynome ω_j und

$$[x_0, \ldots, x_n] f = \frac{[x_1, \ldots, x_n] f - [x_0, \ldots, x_{n-1}] f}{x_n - x_0}.$$

Fehleranalyse — Restglieddarstellung

Satz 8.22

Seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen, $x \in \mathbb{R}$,

$$a := \min\{x_0, \dots, x_n\},$$
$$b := \max\{x_0, \dots, x_n\} \quad \text{und}$$
$$I := \big[\min\{a, x\}, \max\{b, x\}\big].$$

Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass

$$f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)\right) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

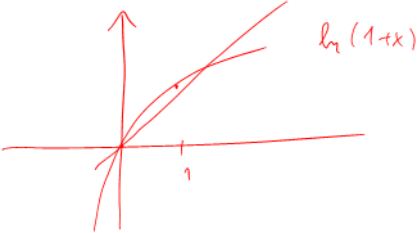
gilt. Insbesondere gilt

$$\max_{y \in I} |f(y) - P(f|x_0, \dots, x_n)(y)| \leq \max_{y \in I} \left| \prod_{j=0}^{n} (y - x_j) \right| \cdot \max_{y \in I} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}.$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1 + x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.



Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert.

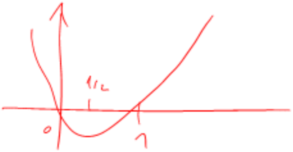
Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0,1]$.

- Mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\xi \in [0,1]$

$$f(x) - P(f|0,1)(x) = -(x-0)\,(x-1)\,\frac{1}{2\,(1+\xi)^2}.$$



Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0,1]$.

- Mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\xi \in [0,1]$

$$f(x) - P(f|0,1)(x) = -(x-0)\,(x-1)\,\frac{1}{2\,(1+\xi)^2}.$$

- Da $\max_{x\in[0,1]} |(x-0)\,(x-1)| = \frac{1}{4}$ und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0,1)(x)| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

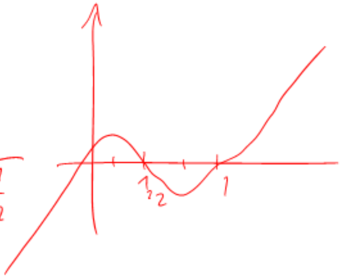
$$p(x) = x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) = x\left(x^2 - x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$p'(x) = 3x^2 - 3x + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}$$



$$p\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \mp \frac{\sqrt{3}}{36}$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ quadratisch interpoliert.
Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- Mit der Ableitung $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, \tfrac{1}{2}, 1)(x) = (x-0)(x-\tfrac{1}{2})(x-1)\frac{2}{3!(1+\xi)^3}$$

- Da

$$\max_{x\in[0,1]} \left| x \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) \right| = \frac{\sqrt{3}}{36},$$

und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, 0.5, 1)(x)| \leq \frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Definiere

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \text{ und } M_{n+1}(f) := \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

Dann erhält man für die Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| \, M_{n+1}(f)$$

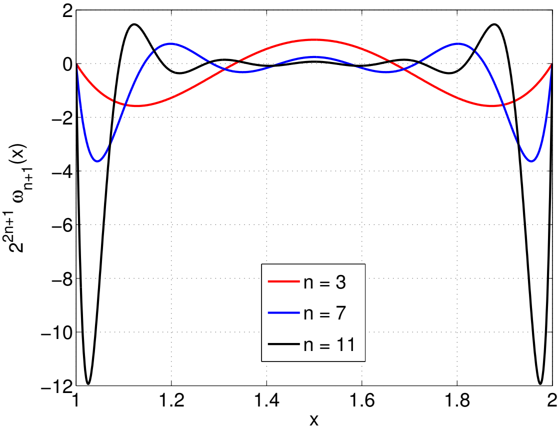
für $x \in [a,b]$ und $x_j \in [a,b]$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Beachte

- $M_{n+1}(f)$ hängt nur von f ab, aber nicht von Stützstellen
- $\omega_{n+1}(x)$ hängt nur von den Stützstellen ab, aber nicht von f.

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- Verhalten der Funktion $\boldsymbol{\omega_{n+1}}$ bei äquidistanten Stützstellen.
- Beispiel: $\boldsymbol{x_j = 1 + \frac{j}{n}, j = 0, \ldots, n}$ für $\boldsymbol{n = 3, 7, 11.}$



Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

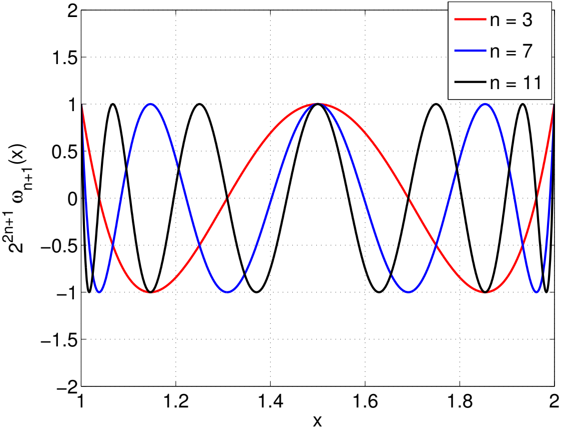
Bemerkung 8.25

- Das Verhalten der Funktion ω_{n+1} kann für eine andere Wahl der Stützstellen wesentlich besser sein.
- Es ist bekannt, dass die Nullstellen der sogenannten Tschebyscheff-Polynome wesentlich günstiger Stützstellen liefern.
- Für diese Nullstellen gibt es explizite Formeln, z.B. für das Intervall $[1, 2]$ hat man die Formeln

$$x_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei Tschebyscheff-Stützstellen.



Grenzen der Polynominterpolation

Beispiel: Runges Phänomen

- Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.

- Die Folge der Interpolationspolynome

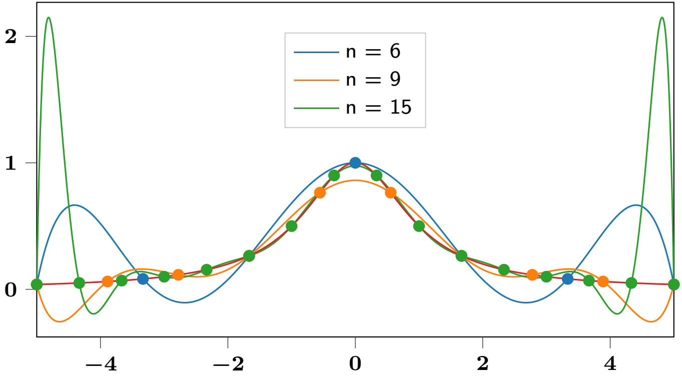
$$P_n(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$$

mit

$$x_j = -5 + 10\,\frac{j}{n}, \quad j = 0, \ldots, n,$$

divergiert auf $[-5, 5]$.

Grenzen der Polynominterpolation



Fazit

Als Mittel, über immer mehr Stützstellen immer bessere Approximationen zu gewinnen, taugt die Polynominterpolation im allgemeinen nicht.

Fester Polynomgrad

- Seien $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$ und $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ mit n fest.
- Die Länge des Intervalls $h := b - a$ sei veränderbar.
- Falls $x \in I := [a, b]$ liegt, erhält man sofort die grobe Abschätzung

$$|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1},$$

und somit

$$\|f - P(f|x_0, \dots, x_n)\|_{L_\infty(I)} \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_{L_\infty(I)}.$$

- Der Fehler wird kleiner, wenn die Stützstellen gemäß h zusammenrücken.

Dieser Effekt wird in den meisten Anwendungen benutzt.

Matlab-Demo https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/imng/TCM/TCM_polyint.m

Beispiel 8.26

Die Funktion $f(x) = \log(1 + x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h.

- Wir erhalten (siehe Beispiel 8.24)

$$f(x) - P(f|0, h)(x) = -(x - 0)\,(x - h)\,\frac{1}{2\,(1 + \xi)^2}.$$

- Da $\max_{x \in [0,h]} |(x - 0)\,(x - h)| = \frac{h^2}{4}$ und $\xi > 0$ folgt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, h)(x)| \leq \frac{h^2}{8}, \quad \text{für } x \in [0, h].$$

- Der Verfahrensfehler strebt also mit der Ordnung 2 gegen 0.

$$f\left(x \pm \tfrac{1}{2}h\right) = f(x) \pm \tfrac{1}{2}h\, f'(x) + \tfrac{1}{4}h^2 f''(x) \pm \underbrace{\frac{1}{3!\,2^3}}_{=\frac{1}{48}} h^3 f'''(\xi_1)$$

$$\Rightarrow f\left(x + \tfrac{1}{2}h\right) - f\left(x - \tfrac{1}{2}h\right) = h\, f'(x) + \frac{h^3}{24}\left(\tfrac{1}{2}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)\right)$$

Numerische Differentiation

Zur Erinnerung: In der Newton-Interpolationsformel ist

$$\delta_n := [x_0, \ldots, x_n]f$$

der Koeffizient der Potenz x^n. Daraus folgt

$$n!\,[x_0, \ldots, x_n]f = P(f|x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) \approx f^{(n)}(x).$$

1. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + j\,h$,

$$f'(x) \approx 1![x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad \big(x \in [x_0, x_1]\big),$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - \frac{1}{2}\,h$ und $x_1 = x + \frac{1}{2}\,h$ (zentrale Differenzen)

$$f'(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2}\,h) - f(x - \frac{1}{2}\,h)}{h} - \frac{h^2}{24}\,f'''(\xi).$$

Numerische Differentiation

2. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + j\,h$,

$$f''(x) \approx 2!\,[x_0, x_1, x_2]f = \frac{f(x_2) - 2\,f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \quad (x \in [x_0, x_2]),$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - h$, $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$ schließlich

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}\,f^{(4)}(\xi).$$

vgl. Beispiel 3.2.

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Differenzenquotient

$$\Delta_h := \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- Fehler in den Daten

$$\widetilde{\Delta}_h := \frac{\tilde{f}(x+h) - 2\,\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-h)}{h^2}.$$

- Fehler in Δ_h aufgrund von Datenfehler ($|f(y) - \tilde{f}(y)| \leq \epsilon$)

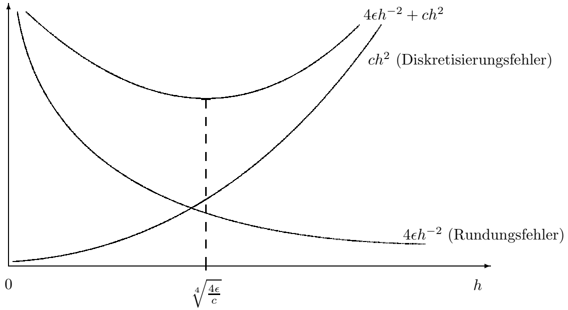
$$\left|\Delta_h - \widetilde{\Delta}_h\right| = \frac{1}{h^2}\,\Big|\Big(f(x+h) - \tilde{f}(x+h)\Big) - 2\,\Big(f(x) - \tilde{f}(x)\Big) + \Big(f(x-h) - \tilde{f}(x-h)\Big)\Big| \leq \frac{4\,\epsilon}{h^2}.$$

Gesamtfehler

$$\left|\widetilde{\Delta}_h - f''(x)\right| \leq \left|\widetilde{\Delta}_h - \Delta_h\right| + \left|\Delta_h - f''(x)\right| \leq \frac{4\,\epsilon}{h^2} + c\,h^2$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Die Schranke wird für $h = \sqrt[4]{4\,\epsilon/c}$ minimal.
- Bsp: $\epsilon = 10^{-9} \;\Rightarrow\; h \approx 10^{-2}$, kleineres h vergrößert Fehler



Merke

Man sollte stets dafür sorgen, dass Rundungsfehler einen kleineren Einfluß haben als Diskretisierungsfehler.

Beispiel 8.36

Aufgabe

Annäherung der zweiten Abteilung von $f(x) = \sin(x) + 3\,x^2$ an der Stelle $x = 0.6$ mit dem Differenzquotienten

$$\Delta_h = \frac{f(x+h) - 2\,f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- Wir rechnen auf einer Maschine mit **eps** $\approx 10^{-16}$
- Man erwartet einen minimalen Gesamtfehler für $h \approx 10^{-4}$
- Experimentell bestätigt sich dies:

h	$\tilde{\Delta}_h$	$\lvert\tilde{\Delta}_h - f''(x)\rvert$
10^{-2}	5.4353622319	4.71e-06
10^{-3}	5.4353575738	4.72e-08
10^{-4}	5.4353574974	2.92e-08
10^{-5}	5.4353566092	9.17e-07
10^{-6}	5.4352078394	1.50e-04
10^{-7}	5.4400928207	4.74e-03

Zusammenfassung

- Für die Numerik günstige Darstellung:

  Newtonsche Interpolationsformel

- Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)|\, M_{n+1}(f)$$

mit $\omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$, $M_{n+1}(f) = \max_{x\in[a;b]} \frac{|f^{[n+1)}(x)|}{(n+1)!}$

- Sehr hoher Polynomgrad: oft nicht günstig (Runge-Beispiel).
- Besser: fester Grad $+$ Wiederholung

  $+$ Verkleinerung des Interpolationsintervalls

- Numerische Differentiation:

$$f^{(n)}(x) \approx n!\,[x_0, \dots, x_n]f \quad \rightsquigarrow \quad \text{Formeln}$$

- Wahl von h: Kompromiss zwischen Diskretisierungsfehler und Rundungsfehler (Auslöschung)

Verständnisfragen

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ sowie $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

f $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \delta_n\,(x - x_n) + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ gilt für alle x.

Es sei $f(x) = 3\,x^2 + 2$.

Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$. **0**

w Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j$. Dann gilt $a_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.

w Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.

Verständnisfragen

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

in den Stützstellen $a \leq x_0 < \cdots < x_n \leq b$ interpoliert.

- f Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n, so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.
- f Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation
- f Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} |P(f \,|\, x_0, \ldots, x_n) - f(x)|$ hängt nicht von der Wahl der Stützstellen ab.
- f $\max\limits_{x\in[a,b]} |P(f \,|\, x_0, .., x_n)(x) - f(x)| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |P(f \,|\, x_0, .., x_{n-1})(x) - f(x)|$