

Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Interpolation II

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist **stets eindeutig lösbar**, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Insbesondere lässt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten **Lagrange-Fundamentalpolynome** sind.

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Effiziente Auswertung mittels Neville-Aitken-Schema

Werten Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an der Stelle $x = 0.5$ aus.

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$\implies P(f | 0, 1, 2)(0.5) = 3\frac{1}{8}$$

Zusammenfassung der letzten Vorlesung

Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom, das **in der Potenzform vorliegt**, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

mit **bekannten** Koeffizienten $a_0, \dots, a_n$. Es gilt

$$p(x) = a_0 + x \left(a_1 + x \left(a_2 + \cdots + x \left(a_{n-1} + x a_n \right) \cdots \right) \right).$$

Algorithmus 8.12. (Horner-Schema)

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + x b_{k+1}$$

Dann ist

$$p(x) = b_0.$$

Der Rechenaufwand wird etwa halbiert.

Heute in der Vorlesung

Themen:

Dahmen & Reusken Kap 8.1-8.3

- ▶ Lagrange-Interpolationsaufgabe
- ▶ Newtonsche Darstellung
- ▶ Fehleranalyse
- ▶ Numerische Differentiation

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie funktioniert die Newtonsche Interpolationsformel?
- ▶ Fehlerreduktion bei Interpolation:
 - ▶ Erhöhung Polynomgrad oder Stützstellenanzahl?
- ▶ Numerische Differentiation:
 - ▶ Wie macht man das und wie wählt man die Schrittweite?

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Annahme: Interpolationspolynom $P(f|x_0, \dots, x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt

Aufgabe: Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0, \dots, x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$ aus $P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \underbrace{\delta_n (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Beachte:

- ▶ δ_n ist ein skalarer (fester) Wert.
- ▶ δ_n ist der Koeffizient der höchsten Potenz x^n .

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.13

Für die Lagrange-Interpolationspolynome

$$P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) \in \Pi_{n-1}$$

und

$$P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x) \in \Pi_n$$

gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Da der Koeffizient δ_n von f und von den Stützstellen x_i abhängt, schreibt man auch

$$\delta_n =: [x_0, \dots, x_n]f.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.14

$\delta_n = [x_0, \dots, x_n]f$ ist offensichtlich der **führende Koeffizient** des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n .

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ an und setzt $[x_0]f = f(x_0)$, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = & [x_0]f + (x - x_0) \cdot [x_0, x_1]f \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \cdot [x_0, x_1, x_2]f + \dots \\ & + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \cdot [x_0, \dots, x_n]f. \end{aligned}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newton'sche Interpolationsformel

Bemerkungen:

- Die Knotenpolynome

$$\omega_0(x) := 1$$

$$\omega_1(x) := (x - x_0)$$

$$\vdots$$

$$\omega_n(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

bilden die **Newton'sche Basis** von Π_n .

- Für die Koeffizienten erhält man zum Beispiel

$$\delta_0 = [x_0]f = f(x_0)$$

$$\delta_1 = [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

bzw. verallgemeinert ...

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.16

Seien die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{[x_1, \dots, x_n]f - [x_0, \dots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

Man nennt $[x_0, \dots, x_n]f$ dividierte Differenz der Ordnung n .

Da $[x_i]f = f(x_i)$ erhält man das **rekursive Schema**

	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
x_0	$[x_0]f$			
x_1	$[x_1]f$	$[x_0, x_1]f$		
x_2	$[x_2]f$	$[x_1, x_2]f$	$[x_0, x_1, x_2]f$	
x_3	$[x_3]f$	$[x_2, x_3]f$	$[x_1, x_2, x_3]f$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]f$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \dots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$				
$x_0 = 0$	1.000				
$x_1 = 0.2$	0.9801	>	-0.0995	>	-0.4888
$x_2 = 0.4$	0.9211	>	-0.2950	>	-0.4600
$x_3 = 0.6$	0.8253	>	-0.4790	>	0.0480

$$P(\cos x|0)(x) = 1.000$$

$$P(\cos x|0, 0.2)(x) = 1.000 - 0.0995x$$

$$P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) = 1.000 - 0.0995x - 0.4888x(x - 0.2)$$

Beispiel 8.18

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \dots, 3$.

Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$				
$x_0 = 0$	1.000				
$x_1 = 0.2$	0.9801	>	-0.0995	>	-0.4888
$x_2 = 0.4$	0.9211	>	-0.2950	>	-0.4600
$x_3 = 0.6$	0.8253	>	-0.4790	>	0.0480

$$P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x)$$

$$= P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.0480 x (x - 0.2) (x - 0.4)$$

$$= 1.000 - 0.0995 x - 0.4888 x (x - 0.2)$$

$$+ 0.0480 x (x - 0.2) (x - 0.4).$$

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

- (i) $[x_0, \dots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h.

hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab
(konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

- (ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \dots, x_k]Q = 0$

- (iii) Für die Newtonsche Basispolynome ω_k gilt

$$[x_0, \dots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \text{ für } j, k = 0, \dots, n.$$

- (iv) Sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i$, $b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i$,

$I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ hat **unterschiedliche Darstellungen** abhängig von der **Wahl der Basis** in Π_n :

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x), \quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

2. monomiale Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

3. Newtonsche Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n [x_0, \dots, x_j] f \omega_j(x), \quad \text{Knotenpolynome } \omega_j \text{ und}$$

$$[x_0, \dots, x_n] f = \frac{[x_1, \dots, x_n] f - [x_0, \dots, x_{n-1}] f}{x_n - x_0}.$$

Fehleranalyse — Restglieddarstellung

Satz 8.22

Seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen, $x \in \mathbb{R}$,

$$a := \min\{x_0, \dots, x_n\},$$

$$b := \max\{x_0, \dots, x_n\} \quad \text{und}$$

$$I := [\min\{a, x\}, \max\{b, x\}].$$

Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass

$$f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \max_{y \in I} |f(y) - P(f|x_0, \dots, x_n)(y)| \\ \leq \max_{y \in I} \left| \prod_{j=0}^n (y - x_j) \right| \cdot \max_{y \in I} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- ▶ Mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, 1)(x) = -(x-0)(x-1) \frac{1}{2(1+\xi)^2}.$$

- ▶ Da $\max_{x \in [0, 1]} |(x-0)(x-1)| = \frac{1}{4}$ und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, 1)(x)| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$ und $x_2 = 1$ quadratisch interpoliert.

Bestimmen Sie den Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- Mit der Ableitung $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, \tfrac{1}{2}, 1)(x) = (x-0)(x-\tfrac{1}{2})(x-1) \frac{2}{3!(1+\xi)^3}$$

- Da

$$\max_{x \in [0,1]} \left| x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x-1) \right| = \frac{\sqrt{3}}{36},$$

und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, 0.5, 1)(x)| \leq \frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Definiere

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^n (x - x_j) \text{ und } M_{n+1}(f) := \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

Dann erhält man für die Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

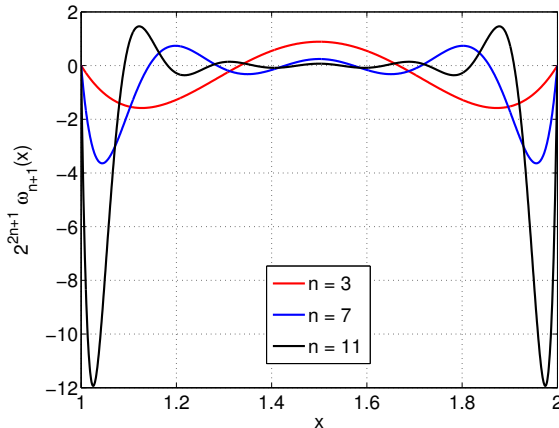
für $x \in [a, b]$ und $x_j \in [a, b]$, $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Beachte

- ▶ $M_{n+1}(f)$ hängt nur von f ab, aber nicht von Stützstellen
- ▶ $\omega_{n+1}(x)$ hängt nur von den Stützstellen ab, aber nicht von f .

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- ▶ Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei **äquidistanten** Stützstellen.
- ▶ Beispiel: $x_j = 1 + \frac{j}{n}$, $j = 0, \dots, n$ für $n = 3, 7, 11$.



Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

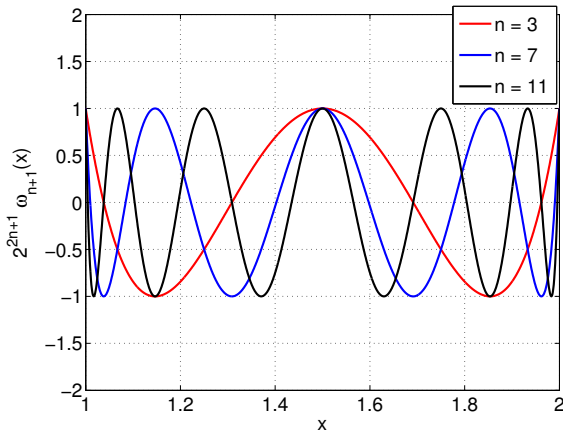
Bemerkung 8.25

- ▶ Das Verhalten der Funktion ω_{n+1} kann für eine andere Wahl der Stützstellen wesentlich besser sein.
- ▶ Es ist bekannt, dass die Nullstellen der sogenannten **Tschebyscheff-Polynome** wesentlich günstiger Stützstellen liefern.
- ▶ Für diese Nullstellen gibt es explizite Formeln, z.B. für das Intervall $[1, 2]$ hat man die Formeln

$$x_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2j+1}{2n+2} \pi \right), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei Tschebyscheff-Stützstellen.



Grenzen der Polynominterpolation

Beispiel: Runge's Phänomen

- ▶ Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.

- ▶ Die Folge der Interpolationspolynome

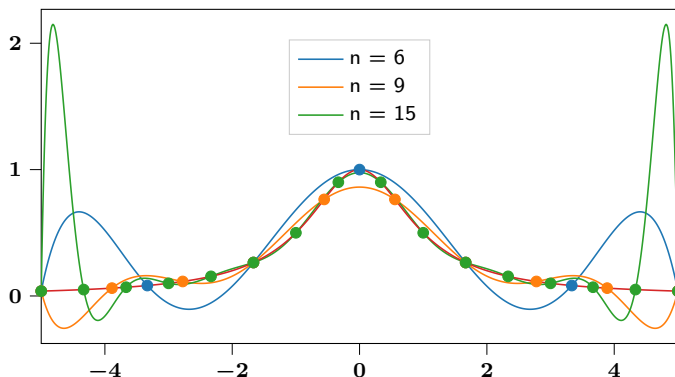
$$P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$$

mit

$$x_j = -5 + 10 \frac{j}{n}, \quad j = 0, \dots, n,$$

divergiert auf $[-5, 5]$.

Grenzen der Polynominterpolation



Fazit

Als Mittel, über immer mehr Stützstellen immer bessere Approximationen zu gewinnen, taugt die Polynominterpolation im allgemeinen **nicht**.

Fester Polynomgrad

- ▶ Seien $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$ und $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ mit n fest.
- ▶ Die Länge des Intervalls $h := b - a$ sei veränderbar.
- ▶ Falls $x \in I := [a, b]$ liegt, erhält man sofort die grobe Abschätzung

$$|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1},$$

und somit

$$\|f - P(f|x_0, \dots, x_n)\|_{L_\infty(I)} \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{L_\infty(I)}.$$

- ▶ Der Fehler wird kleiner, wenn die Stützstellen gemäß h zusammenrücken.

Dieser Effekt wird in den meisten Anwendungen benutzt.

Beispiel 8.26

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert.

Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h .

- Wir erhalten (siehe Beispiel 8.24)

$$f(x) - P(f|0, h)(x) = -(x-0)(x-h) \frac{1}{2(1+\xi)^2}.$$

- Da $\max_{x \in [0, h]} |(x-0)(x-h)| = \frac{h^2}{4}$ und $\xi > 0$ folgt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, h)(x)| \leq \frac{h^2}{8}, \quad \text{für } x \in [0, h].$$

- Der Verfahrensfehler strebt also mit der Ordnung **2** gegen 0.

Numerische Differentiation

Zur Erinnerung: In der Newton-Interpolationsformel ist

$$\delta_n := [x_0, \dots, x_n]f$$

der Koeffizient der Potenz x^n . Daraus folgt

$$n! [x_0, \dots, x_n]f = P(f|x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) \approx f^{(n)}(x).$$

1. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + j h$,

$$f'(x) \approx 1![x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad (x \in [x_0, x_1]),$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - \frac{1}{2} h$ und $x_1 = x + \frac{1}{2} h$ (zentrale Differenzen)

$$f'(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2} h) - f(x - \frac{1}{2} h)}{h} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi).$$

Numerische Differentiation

2. **Ableitung:** Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen

$$x_j = x_0 + j h,$$

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx 2! [x_0, x_1, x_2] f \\ &= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \quad (x \in [x_0, x_2]), \end{aligned}$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - h$,
 $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$ schließlich

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

vgl. Beispiel 3.2.

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Differenzenquotient

$$\Delta_h := \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- Fehler in den Daten

$$\tilde{\Delta}_h := \frac{\tilde{f}(x+h) - 2\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-h)}{h^2}.$$

- Fehler in Δ_h aufgrund von Datenfehler ($|f(y) - \tilde{f}(y)| \leq \epsilon$)

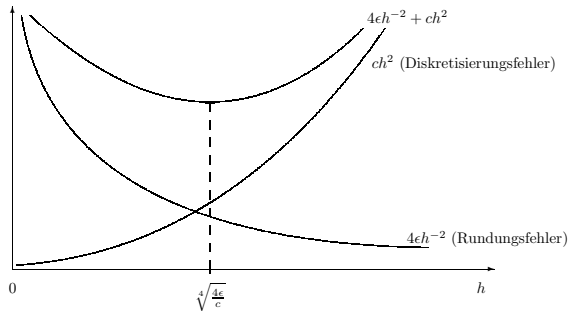
$$\begin{aligned} |\Delta_h - \tilde{\Delta}_h| &= \frac{1}{h^2} \left| \left(f(x+h) - \tilde{f}(x+h) \right) - 2 \left(f(x) - \tilde{f}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(f(x-h) - \tilde{f}(x-h) \right) \right| \leq \frac{4\epsilon}{h^2}. \end{aligned}$$

Gesamtfehler

$$|\tilde{\Delta}_h - f''(x)| \leq |\tilde{\Delta}_h - \Delta_h| + |\Delta_h - f''(x)| \leq \frac{4\epsilon}{h^2} + c h^2$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Die Schranke wird für $h = \sqrt[4]{4\epsilon/c}$ minimal.
- Bsp: $\epsilon = 10^{-9} \Rightarrow h \approx 10^{-2}$, kleineres h vergrößert Fehler



Merke

Man sollte stets dafür sorgen, dass **Rundungsfehler** einen **kleineren Einfluß** haben als **Diskretisierungsfehler**.

Beispiel 8.36

Aufgabe

Annäherung der zweiten Ableitung von $f(x) = \sin(x) + 3x^2$ an der Stelle $x = 0.6$ mit dem Differenzquotienten

$$\Delta_h = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- ▶ Wir rechnen auf einer Maschine mit $\text{eps} \approx 10^{-16}$
- ▶ Man erwartet einen minimalen Gesamtfehler für $h \approx 10^{-4}$
- ▶ Experimentell bestätigt sich dies:

h	$\tilde{\Delta}_h$	$ \tilde{\Delta}_h - f''(x) $
10^{-2}	5.4353622319	4.71e-06
10^{-3}	5.4353575738	4.72e-08
10^{-4}	5.4353574974	2.92e-08
10^{-5}	5.4353566092	9.17e-07
10^{-6}	5.4352078394	1.50e-04
10^{-7}	5.4400928207	4.74e-03

Zusammenfassung

- Für die Numerik günstige Darstellung:

Newton'sche Interpolationsformel

- Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

$$\text{mit } \omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j), M_{n+1}(f) = \max_{x \in [a; b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

- Sehr hoher Polynomgrad: oft nicht günstig (Runge-Beispiel).
- Besser: fester Grad + Wiederholung
+ Verkleinerung des Interpolationsintervalls
- Numerische Differentiation:

$$f^{(n)}(x) \approx n! [x_0, \dots, x_n]f \rightsquigarrow \text{Formeln}$$

- Wahl von h : Kompromiss zwischen Diskretisierungsfehler und Rundungsfehler (Auslöschung)

Verständnisfragen

Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ sowie $[x_0, \dots, x_n]$ f die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

f $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = \delta_n(x - x_n) + P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ gilt für alle x .

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$.

Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$.

0

w Es sei $P(f | x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$.
Dann gilt $a_n = [x_0, \dots, x_n] f$.

w Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n . Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$,
 $\omega_k(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \dots, n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n .

Verständnisfragen

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n , das die Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

in den Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ interpoliert.

- f** Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n , so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.
- f** Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation
- f** Der Fehler $\max_{x \in [a, b]} |P(f | x_0, \dots, x_n) - f(x)|$ hängt nicht von der Wahl der Stützstellen ab.
- f** $\max_{x \in [a, b]} |P(f | x_0, \dots, x_n)(x) - f(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x) - f(x)|$