Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Numerische Integration II

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbbert

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung: Allgemeine Quadraturformel

Satz 10.3 und Lemma 10.4

Für gegebene Knoten $c \le x_0 < \cdots < x_m \le d$ mit $h = d - c$ gibt es Gewichte $c_0, \ldots, c_m$ so dass

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx = h \sum_{j=0}^{m} c_j\, f(x_j)\,.$$

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \ne j}}^{m} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x)\, dx\,.$$

f

$\int_c^d f\, dx\,?$

Zusammenfassung: Allgemeine Quadraturformel

Satz 10.3 und Lemma 10.4

Für gegebene Knoten $c \leq x_0 < \cdots < x_m \leq d$ mit $h = d - c$ gibt es Gewichte $c_0, \ldots, c_m$ so dass

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx = h \sum_{j=0}^{m} c_j\, f(x_j)\,.$$

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{m} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x)\, dx\,.$$

Die Quadraturformel ist exakt vom Grade m, d.h.

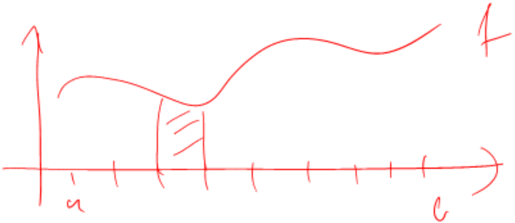
für jedes Polynom $Q \in \Pi_m$ gilt $I_m(Q) = \int_c^d Q(x)\, dx$.

Zusammenfassung: Newton-Cotes-Formeln

Newton-Cotes-Formeln für äquidistante Stützstellen

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j\, f(c+\xi_j\, h), \quad \text{wobei } \xi_j = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = m = 0 \\ \frac{j}{m}, & j = 0, \dots, m > 0\,. \end{cases}$$

m		ξ_j	c_j	$I_m(f) - \int_c^d f(x)dx$
1	Trapezregel	$0, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}\, h^3\, f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}\, \left(\frac{1}{2}h\right)^5\, f^{(4)}(\xi)$



Zusammenfassung: Newton-Cotes-Formeln

Newton-Cotes-Formeln für äquidistante Stützstellen

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j\, f(c+\xi_j\, h), \quad \text{wobei} \quad \xi_j = \begin{cases} \frac{1}{2}, & j = m = 0 \\ \frac{j}{m}, & j = 0, \dots, m > 0\,. \end{cases}$$

m		ξ_j	c_j	$I_m(f) - \int_c^d f(x)dx$
1	Trapezregel	$0, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}\, h^3\, f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}\, \left(\frac{1}{2}h\right)^5\, f^{(4)}(\xi)$

Summierte Formel: $I_{m,n}(f) = \sum_{k=1}^{n} h \sum_{j=0}^{m} c_j\, f(t_{k-1} + \xi_j\, h)$

Fehlerschranke (Simpson): $E(h) = I_{m,n}(f) - \int_a^b f(x)\, dx$

$$E(h) = \frac{h^4}{2880} \sum_{k=1}^{n} h\, f^{(4)}(\xi_k) \begin{cases} \le \frac{h^4}{2880}\, (b-a)\, \|f^{(4)}\|_\infty, \\ \approx \frac{h^4}{2880}\, \left(f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)\right)\,. \end{cases}$$

$$0 = 2(c_0 x_0 + c_1 x_1) \Rightarrow c_0 x_0 = -c_1 x_1$$

$$\Rightarrow 0 = 2(c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3) = 2(-c_1 x_1 x_0^2 + c_1 x_1^3) = 2 c_1 x_1 (x_1^2 - x_0^2)$$

$c_1 \neq 0,\ x_1 \neq 0$ $\qquad$ $x_1 \neq x_0$

$$\Rightarrow x_1^2 = x_0^2 \Rightarrow x_0 = -x_1$$

$$\Rightarrow 0 = 2(c_0 x_0 + c_1 x_1) = 2(c_0 x_0 - c_1 x_0) = 2x_0(c_0 - c_1)$$

$x_0 \neq 0$

$$\Rightarrow c_0 = c_1$$

$$\Rightarrow 2 = 2(c_0 + c_1) = 4c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = 2(c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2) = 2\left(\frac{1}{2} x_0^2 + \frac{1}{2} x_0^2\right) = 2x_0^2$$

$$\Rightarrow x_0^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x_1 = \mp\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Zusammenfassung: Gauß-Quadratur, Berechnung c_i, x_i

Die Gauß-Quadraturformel ($m = 1$, $[c, d] = [-1, 1]$)

$$I_1(f) = 2\left(c_0\, f(x_0) + c_1\, f(x_1)\right)$$

muss für $p \in \Pi_3$ exakt sein, d.h.

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 2\left(c_0\, p(x_0) + c_1\, p(x_1)\right)$$

für $p(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3.$ Aus

$$\int_{-1}^{1} x^k\, dx = 2\left(c_0\, x_0^k + c_1\, x_1^k\right), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

erhält man die Gleichungen

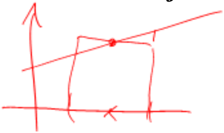
$$\begin{aligned} 2 &= 2\,(c_0 + c_1), & 0 &= 2\,(c_0\, x_0 + c_1\, x_1), \\ \tfrac{2}{3} &= 2\,(c_0\, x_0^2 + c_1\, x_1^2), & 0 &= 2\,(c_0\, x_0^3 + c_1\, x_1^3). \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Newton-Cotes / Gauß-Quadratur

- Newton-Cotes: äquidistante Stützstellen $x_0, \ldots, x_m$
  Idee: Integriere $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)$.
- Gauß-Quadratur: spezifisch gewählte Stützstellen
  Idee: Finde $x_0, \ldots, x_m$, $c_0, \ldots, c_m$, so dass I_m exakt für alle $Q \in \Pi_{2m+1}$.

Unterschiede

- Newton-Cotes: einfacher, Exaktheitsgrad m oder $m+1$
- Gauß-Quadratur: Gewichte $c_j > 0$, Exaktheitsgrad $2\,m+1$



Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 10.4-10.5

- Extrapolation und Romberg-Quadratur
- Integraltansformation
- Zweidimensionale Integrale

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie werden Integrale und Quadraturformeln transformiert?
- Wie werden zweidimensionale Integrale auf "einfachen" Gebieten approximiert?

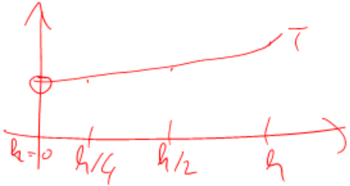
Extrapolation und Romberg-Quadratur

Zu berechnen sei das Integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Die summierte Trapezformel $T(h)$ liefert Approximation der Ordnung h^2.

Ziel: Numerische Approximation an $\lim_{h\to 0} T(h) = I$ mittels der Werte $T(h), T(h/2), T(h/4), \ldots$ verbessern: **Extrapolation**



Extrapolation und Romberg-Quadratur

Zu berechnen sei das Integral

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Die summierte Trapezformel $T(h)$ liefert Approximation der Ordnung h^2.

Ziel: Numerische Approximation an $\lim_{h\to 0} T(h) = I$ mittels der Werte $T(h), T(h/2), T(h/4), \ldots$ verbessern: **Extrapolation**

Grundlage: Asymptotische Entwicklung des Diskretisierungsfehlers:

$$T(h) - I = c_1\,h^2 + c_2\,h^4 + c_3\,h^6 + \cdots + c_p\,h^{2\,p} + \mathcal{O}(h^{2\,p+2})\,.$$

$\Rightarrow$ Euler-Maclaurinsche Summenformel

Extrapolation und Romberg-Quadratur

Hieraus erhält man

$$T\left(\frac{1}{2}h\right) - I = c_1\,\frac{1}{4}\,h^2 + \hat{c}_2\,h^4 + \cdots + \hat{c}_p\,h^{2\,p} + \mathcal{O}(h^{2\,p+2}),$$

also

$$\left[\frac{4}{3}T\left(\frac{1}{2}\,h\right) - \frac{1}{3}\,T(h)\right] - I = \tilde{c}_1\,h^4 + \cdots + \tilde{c}_p\,h^{2\,p} + \mathcal{O}(h^{2\,p+2})\,.$$

Treiben wir diese Idee nun systematisch weiter.

Setzen dazu

$$T_1(h) = \frac{4\,T(\frac{1}{2}\,h) - T(h)}{3}.$$

Extrapolation und Romberg-Quadratur

Es gilt

$$T_1(h) - I = \tilde{c}_1\, h^4 + \tilde{c}_2\, h^6 + \cdots + \mathcal{O}(h^{2\,p+2}),$$

und damit

$$T_1\left(\frac{1}{2}\, h\right) - I = \tilde{c}_1\, \frac{1}{16}\, h^4 + \tilde{c}_2\, \frac{1}{64}\, h^6 + \cdots + \mathcal{O}(h^{2\,p+2}),$$

und

$$\begin{aligned} &\frac{16}{15}\, \left(T_1\left(\frac{1}{2}\, h\right) - I\right) - \frac{1}{15}\, (T_1(h) - I) \\ &= \frac{16\, T_1\left(\frac{1}{2}\, h\right) - T_1(h)}{15} - I \\ &= d_1\, h^6 + d_2\, h^8 + \cdots + \mathcal{O}(h^{2\,p+2}). \end{aligned}$$

Extrapolation und Romberg-Quadratur

Man erkennt, dass die Entwicklung des Fehlers der Quadraturformel

$$T_2(h) := \frac{16\, T_1\left(\frac{1}{2}\, h\right) - T_1(h)}{15}$$

mit einem Glied der Ordnung h^6 beginnt.

Mit dieser Idee lassen sich weitere Approximationen der Ordnung $h^8, h^{10}, \ldots$ finden, vorausgesetzt f ist glatt genug.

Allgemeine Idee der Extrapolation

Der gesuchte Wert ist

$$T(0) = \int_a^b f(x)\,dx = I.$$

Bestimmt man das lineare Interpolationspolynom der Funktion

$$T(\sqrt{x}\,) = I + c_1\,x + c_2\,x^2 + \cdots + c_p\,x^p + \mathcal{O}(x^{p+1}),$$

zu den Punkten

$$(h^2, T(h)) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{4}h^2, T\left(\frac{1}{2}h\right)\right),$$

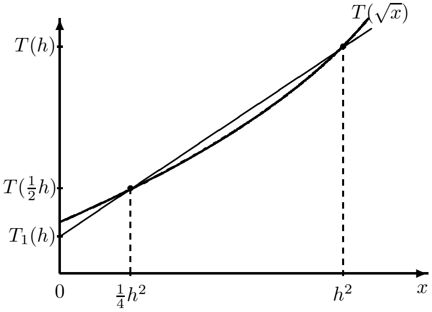
ergibt sich

$$P\left(T(\sqrt{\cdot}\,) \mid h^2, \frac{1}{4}h^2\right)(x) = T(h) + \frac{T\left(\frac{1}{2}\,h\right) - T(h)}{\frac{1}{4}\,h^2 - h^2}(x - h^2).$$

Allgemeine Idee der Extrapolation

Da man $T(0)$ annähern will, extrapoliert man an $x = 0$, d.h.

$$P\left(T(\sqrt{\cdot}) \mid h^2, \frac{1}{4}h^2\right)(0) = T(h) + \frac{4}{3}\left(T\left(\frac{1}{2}h\right) - T(h)\right)$$
$$= T_1(h).$$



Beispiel 10.9

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x \, dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

und $T(h)$ die zugehörige Trapezregel.

Die Extrapolation angewandt auf die Trapezregel liefert:

n	$T(h)$	$T_1(h) = \frac{4}{3}T(h) - \frac{1}{3}T(2h)$	$\lvert T_1(h) - I\rvert$
4	4.39692773		
8	4.38523920	4.38134302	6.93e−05
16	4.38226833	4.38127803	4.33e−06
32	4.38152257	4.38127398	2.70e−07

Erinnerung: $|T(h) - I| = 2.49e-04$ für $n = 32$ (Beispiel 10.2).

Lemma 8.6

$$P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) = \frac{x - x_0}{x_n - x_0} P(f \mid x_1, \dots, x_n)(x) + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} P(f \mid x_0, \dots x_{n-1})(x)$$

Die Näherung $T_2(h)$ lässt sich wie $T_1(h)$ ebenfalls über Extrapolation erklären.
Es gilt

$$
\begin{aligned}
& P\left(T(\sqrt{\cdot})\,|\,h^2,\ \frac{1}{4}h^2,\ \frac{1}{16}h^2\right)(0) \\
= \quad & \frac{-h^2}{\frac{1}{16}h^2 - h^2}\, P\left(T(\sqrt{\cdot})|\frac{1}{4}h^2,\ \frac{1}{16}h^2\right)(0) \\
& + \frac{\frac{1}{16}h^2}{\frac{1}{16}h^2 - h^2}\, P\left(T(\sqrt{\cdot})|h^2,\ \frac{1}{4}h^2\right)(0) \\
= \quad & \frac{16}{15} T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{15} T_1(h) \\
= \quad & T_2(h).
\end{aligned}
$$

$$T_{ij}(h) = P\left(T(\sqrt{\cdot}) \mid (2^{-i+j}h)^2, \dots, (2^{-i}h)^2\right)(0)$$

$$\Rightarrow T_{ij}(h) = \underbrace{\frac{0 - 4^{-i+j}h^2}{4^{-i}h^2 - 4^{-i+j}h^2}}_{= \frac{-4^j}{1-4^j} = \frac{4^j}{4^j-1}} T_{i,j-1}(h) + \underbrace{\frac{4^{-i}h^2}{4^{-i}h^2 - 4^{-i+j}h^2}}_{= \frac{1}{1-4^j}} T_{i-1,j-1}(h)$$

Allgemeine Vorgehensweise

Sei

$$T_{i,0} := T(2^{-i}\,h), \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei h eine feste Anfangsschrittweite ist.
Es soll das Interpolationspolynom

$$P\left(T(\sqrt{\cdot})\,|\,h^2, \ldots, (2^{-k}h)^2\right)(x)$$

an der Stelle $x = 0$ ausgewertet werden.
Die Anwendung des Neville-Aitken Schemas um den Wert

$$T_k(h) = T_{k,k} = P\left(T(\sqrt{\cdot})\,|\,h^2, \ldots, (2^{-k}h)^2\right)(0)$$

zu berechnen, liefert

Romberg-Rekursion

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}, \quad j = 1, 2, \ldots, \; i \geq j.$$

Romberg-Schema

Entsprechend dem Neville-Aitken-Schema ergibt sich das

Romberg-Schema

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & T_{i-1,j-1} & & \\
 & & & & & & & \searrow \frac{-1}{4^j-1} & \\
T(h) & = & T_{0,0} & & & & T_{i,j-1} & \underset{\frac{4^j}{4^j-1}}{\rightarrow} & T_{i,j} \\
 & & & \searrow & & & & & \\
T(\frac{1}{2}h) & = & T_{1,0} & \rightarrow & T_{1,1} & & & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
T(\frac{1}{4}h) & = & T_{2,0} & \rightarrow & T_{2,1} & \rightarrow & T_{2,2} & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(\frac{1}{8}h) & = & T_{3,0} & \rightarrow & T_{3,1} & \rightarrow & T_{3,2} & \rightarrow & T_{3,3} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Beispiel 10.10

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x \, dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2,$$

wie in Beispiel 10.2, und $T_{i,0} = T(2^{-i}h)$, wobei $T(\cdot)$ die Trapezregel ist.

Für die Anfangsschrittweite $h = \frac{1}{4}\frac{\pi}{2}$ ergibt das Romberg-Schema folgende Werte:

i	$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$
0	4.396927734684			
1	4.385239200472	4.381343022401		
2	4.382268326301	4.381278034910	4.381273702411	
3	4.381522565173	4.381273978130	4.381273707678	4.381273707762

Beispiel 10.10

Fehler:

i	$\lvert I - T_{i,j} \rvert$			
0	1.57e−02			
1	3.97e−03	6.93e−05		
2	9.95e−04	4.33e−06	5.35e−09	
3	2.49e−04	2.70e−07	8.22e−11	1.42e−12

Integraltransformation

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Sei

$$I_1 = [a,b], \quad I_2 = [c,d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \to I_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung.

Es gilt die Transformationsformel

$$\int_{I_1} f(\psi(x))\,|\psi'(x)|\,dx = \int_{I_2} f(y)\,dy.$$

Integraltransformation

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Sei

$$I_1 = [a,b], \quad I_2 = [c,d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \to I_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung.

Es gilt die Transformationsformel

$$\int_{I_1} f(\psi(x))\,|\psi'(x)|\,dx = \int_{I_2} f(y)\,dy.$$

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, falls ψ affin ist, d.h.

$$\widehat{\psi} : [a,b] \to [c,d], \quad \widehat{\psi}(x) = \frac{x-a}{b-a}\,d + \frac{b-x}{b-a}\,c.$$

Integraltransformation

Wenn

$$Q_m(g; I_1) = (b-a) \sum_{i=0}^{m} w_i \, g(x_i)$$

eine Formel zur Annäherung von

$$\int_a^b g(x)\, dx$$

ist, ergibt sich die entsprechende Formel für das Intervall $I_2 = [c, d]$:

$$\begin{aligned} \int_{I_2} f(y)\, dy &= \int_a^b f\left(\widehat{\psi}(x)\right) \left|\widehat{\psi}'(x)\right| \, dx \\ &= \frac{d-c}{b-a} \int_a^b f\left(\widehat{\psi}(x)\right) \, dx \\ &\approx (d-c) \sum_{i=0}^{m} w_i \, f\left(\widehat{\psi}(x_i)\right) \end{aligned}$$

Transformation von Quadraturformeln

Also insgesamt:

$$Q_m(g; I_1) = (b-a) \sum_{i=0}^{m} w_i \, g(x_i)$$

$$Q_m(f; I_2) = (d-c) \sum_{i=0}^{m} \widehat{w}_i \, f(\hat{x}_i),$$

mit

$$\widehat{w}_i = w_i,$$

$$\hat{x}_i = \frac{x_i - a}{b-a} d + \frac{b - x_i}{b-a} c.$$

Beispiel 10.11

Gauß-Quadraturformeln werden oft für das Intervall $[-1,1]$ spezifiziert, z.B.

$$I_{[-1,1]}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left[\frac{1}{2} f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\right]$$

aus Beispiel 10.8.

Die entsprechende Formel für $[c,d]$ und $h := d - c$ lautet:

$$I_{[c,d]}(f) \approx \frac{h}{2}\left[f\left(c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h\right) + f\left(c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h\right)\right]$$

$a = -1 \quad b = 1, \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Beispiel 10.11

Analog kann man für die Gauß-Quadratur mit 4 Stützstellen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{3} w_i\, f(x_i),$$

mit

$$\begin{aligned} w_0 = w_3 &= \tfrac{18-\sqrt{30}}{72} \approx 0.173928, \\ w_1 = w_2 &= \frac{1}{2} - w_0, \\ -x_0 = x_3 &= \sqrt{\tfrac{3}{7} + \tfrac{2}{7}\sqrt{\tfrac{6}{5}}} \approx 0.861136, \\ -x_1 = x_2 &= \sqrt{\tfrac{3}{7} - \tfrac{2}{7}\sqrt{\tfrac{6}{5}}} \approx 0.339981, \end{aligned}$$

eine Formel für ein beliebiges Intervall $[c, d]$ herleiten.

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Wir betrachten nun die Transformation eines zweidimensionalen Integrals

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy, \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei

$$B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\psi : B_1 \to B_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit Jacobi-Matrix

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Es gilt folgende Transformationsformel:

Satz 10.12

Falls $\det J(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in B_1$, so gilt

$$\int_{B_1} f(\psi(x,y))\,|\det J(x,y)|\,dx\,dy = \int_{B_2} f(\tilde{x},\tilde{y})\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}.$$

Für den Spezialfall, ψ affin, ergibt sich

$$\psi(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^2,$$

$$|\det A| \int_{B_1} f\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\right)\,dx\,dy = \int_{B_2} f(\tilde{x},\tilde{y})\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}.$$

Zweidimensionales Integral

Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann man, wie im eindimensionalen Fall, eine Quadraturformel für einen Standardbereich (z.B. Einheitsquadrat, Einheitsdreieck) in eine Formel für einen affin-äquivalenten Bereich überführen.

Wichtiger Unterschied zwischen ein- und mehrdimensionaler Integration:

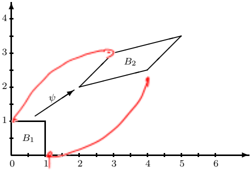
Zwei Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ lassen sich stets durch affine Transformationen aufeinander abbilden.

Hingegen ist es meistens nicht möglich, einfache Gebiete in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, durch eine affine Transformation ineinander zu überführen.

Beispiel 10.14. (Affine Transformationen)

Sei $\mathbf{B_1 = [0,1] \times [0,1]}$ das Einheitsquadrat.

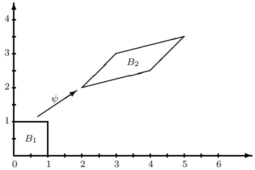
Jede affine Abbildung bildet $\mathbf{B_1}$ auf ein Parallelogramm ab.

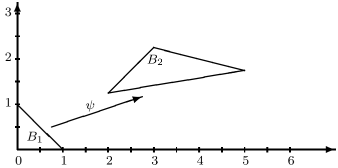


Beispiel 10.14. (Affine Transformationen)

Sei $B_1 = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat.

Jede affine Abbildung bildet B_1 auf ein Parallelogramm ab.





Für das Einheitsdreieck gilt:
Jede affine Abbildung bildet es auf ein Dreieck ab.

Eine affine Abbildung von B_1 auf z.B. den Einheitskreis

$$S = \{(x,y) | \, (x^2 + y^2) \leq 1\}$$

ist also nicht möglich.

Integration über dem Einheitsquadrat

Gesucht ist eine numerische Näherung für

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

Sei

$$F(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx,$$

und

$$Q_m(g) = \sum_{i=0}^{m} w_i\, g(x_i) \approx \int_0^1 g(x)\,dx$$

eine Quadraturformel für dieses eindimensionale Integral.

Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 F(y)\,dy \\
&\approx \sum_{j=0}^{m} w_j\, F(x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} w_j \int_0^1 f(x,x_j)\,dx \\
&\approx \sum_{j=0}^{m} w_j \sum_{i=0}^{m} w_i\, f(x_i,x_j) \\
&= \sum_{i,j=0}^{m} w_i\, w_j\, f(x_i,x_j) =: Q_m^{(2)}(f).
\end{aligned}$$

Beispiel 10.17

Sei

$$Q_1(g) = \frac{1}{2}g(x_0) + \frac{1}{2}g(x_1),\ x_0 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6},\ x_1 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

die eindimensionale Gauß-Quadraturformel mit zwei Stützstellen für das Intervall $[0,1]$, vgl. Beispiel 10.11.

Daraus ergibt sich die Produktregel

$$Q_1^{(2)}(f) = \frac{f(x_0,x_0) + f(x_0,x_1) + f(x_1,x_0) + f(x_1,x_1)}{4}$$

für den Bereich $[0,1] \times [0,1]$.

Diese Formel ist exakt für alle Linearkombinationen von Polynomen

$$x^{k_1}y^{k_2}, \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq 3$$

Beispiel 10.17

Sei

$$Q_1(g) = \frac{1}{2}g(x_0) + \frac{1}{2}g(x_1),\ x_0 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6},\ x_1 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

die eindimensionale Gauß-Quadraturformel mit zwei Stützstellen für das Intervall $[0,1]$, vgl. Beispiel 10.11.

Daraus ergibt sich die Produktregel

$$Q_1^{(2)}(f) = \frac{f(x_0,x_0) + f(x_0,x_1) + f(x_1,x_0) + f(x_1,x_1)}{4}$$

für den Bereich $[0,1] \times [0,1]$.

Diese Formel ist exakt für alle Linearkombinationen von Polynomen

$$x^{k_1}y^{k_2}, \quad 0 \le k_1, k_2 \le 3$$

Integration über dem Einheitsdreieck

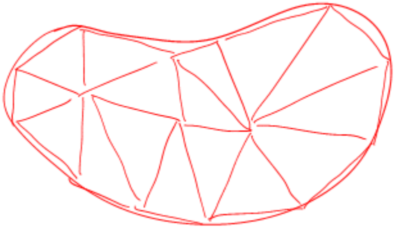
$$\text{(iii)}\quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{2},0\right) + f\left(0,\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\text{(iv)}\quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)\right].$$

Die Monome $1, x, y, x\,y, x^2, y^2$ werden durch (iii), (iv) exakt integriert, d.h. der Exaktheitsgrad ist 2.

(iii)

(iv)



Integration über dem Einheitsdreieck

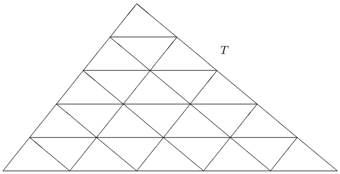
$$\text{(iii)}\quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{2},0\right) + f\left(0,\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\text{(iv)}\quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)\right].$$

Die Monome $1, x, y, x\,y, x^2, y^2$ werden durch (iii), (iv) exakt integriert, d.h. der Exaktheitsgrad ist 2.

Integration beliebiger Dreiecke:

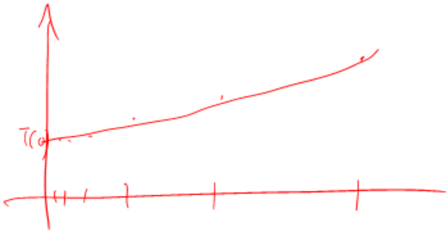
- Unterteilung in kleinere kongruente Dreiecke
- Transformationsformel auf Einheitsdreieck



$\Rightarrow$ zusammengesetzte Quadraturformel

Zusammenfassung

- Approximation von $\lim\limits_{h\to 0} T(h) = I$ mittels Extrapolation von $T(h), T(h/2), T(h/4), \ldots \Rightarrow$ Romberg-Quadratur



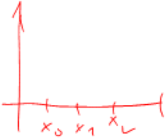
Zusammenfassung

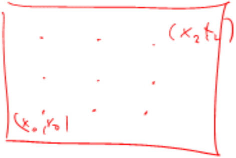
- Approximation von $\lim_{h\to 0} T(h) = I$ mittels Extrapolation von $T(h), T(h/2), T(h/4), \ldots \Rightarrow$ Romberg-Quadratur
- Transformation von Quadraturformeln mittels

$$\int_{I_1} f(\psi(x))\, |\psi'(x)|\, dx = \int_{I_2} f(y)\, dy.$$

- Integration über dem Einheitsquadrat

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy \approx \sum_{i,j=0}^{m} w_i\, w_j\, f(x_i, x_j).$$





Zusammenfassung

- Approximation von $\lim_{h\to 0} T(h) = I$ mittels Extrapolation von $T(h), T(h/2), T(h/4), \ldots \Rightarrow$ Romberg-Quadratur
- Transformation von Quadraturformeln mittels

$$\int_{I_1} f(\psi(x))\, |\psi'(x)|\, dx = \int_{I_2} f(y)\, dy.$$

- Integration über dem Einheitsquadrat

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy \approx \sum_{i,j=0}^{m} w_i\, w_j\, f(x_i, x_j).$$

- Integration über dem Einheitsdreieck, z.B. über

$$Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$$

- Integration über beliebigen Recht-/Dreiecken mittels Transformations auf das Einheitsquadrat/dreieck

Verständnisfragen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sowie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$.

☐ Sei $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [c, d]$ und $\psi : I_1 \to I_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$\int_{I_1} f(\psi(x))\,|\psi'(x)|\,dx = \int_{I_2} f(y)\,dy.$$

$\psi(x) = c$

Verständnisfragen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sowie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$.

f Sei $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [c, d]$ und $\psi : I_1 \to I_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$\int_{I_1} f(\psi(x))\, |\psi'(x)|\, dx = \int_{I_2} f(y)\, dy.$$

w Aus jeder Quadraturformel für das Interval $[a, b]$ mit Exaktheitsgrad m erhält man per Produktregel eine Quadraturformel für das Quadrat $[a, b]^2$ mit Exaktheitsgrad m.

$x^{k_1} y^{k_2} \to k_1 + k_2 \leq m$

Verständnisfragen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

f Einfache Gebiete im $\mathbb{R}^2$ lassen sich durch affine Transformationen ineinander überführen.

w Die Quadraturformel $Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ für das Einheistdreieck hat den Exaktheitsgrad 1.

f Mit der Quadraturformel $Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ kann das Polynom xy exakt integriert werden.