

Numerische Mathematik für Elektrotechniker

Numerische Integration II

Benjamin Berkels

Karl-Heinz Brakhage, Thomas Jankuhn, Christian Löbber

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2019/2020

Zusammenfassung: Allgemeine Quadraturformel

Satz 10.3 und Lemma 10.4

Für gegebene Knoten $c \leq x_0 < \dots < x_m \leq d$ mit $h = d - c$ gibt es **Gewichte** c_0, \dots, c_m so dass

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \dots, x_m)(x) dx = h \sum_{j=0}^m c_j f(x_j).$$

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^m \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x) dx.$$

Die Quadraturformel ist **exakt vom Grade m** , d.h.

für jedes Polynom $Q \in \Pi_m$ gilt $I_m(Q) = \int_c^d Q(x) dx$.

Zusammenfassung: Gauß-Quadratur

Newton-Cotes c_j ändern ab $m \geq 8$ Vorzeichen \Rightarrow **Auslöschung**.

Ziel: c_j positiv und maximaler Exaktheitsgrad \Rightarrow **Gauß-Quadratur**

Satz 10.6

Sei $m \geq 0$. Es **existieren** Stützstellen $x_0, \dots, x_m \in (c, d)$ und **positive** Gewichte w_0, \dots, w_m , so dass mit $h = d - c$

$$h \sum_{i=0}^m w_i f(x_i) = \int_c^d f(x) dx + E_f(h)$$

und $E_Q = 0$ für alle $Q \in \Pi_{2m+1}$.

Ferner gilt für passendes $\xi \in [c, d]$

$$|E_f(h)| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3 (2m+3)} h^{2m+3} \left| f^{(2m+2)}(\xi) \right|.$$

Zusammenfassung: Gauß-Quadratur, Berechnung c_i, x_i

Die Gauß-Quadraturformel ($m = 1, [c, d] = [-1, 1]$)

$$I_1(f) = 2 (c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1))$$

muss für $p \in \Pi_3$ exakt sein, d.h.

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = 2 (c_0 p(x_0) + c_1 p(x_1))$$

für $p(x) = x^k, k = 0, 1, 2, 3$. Aus

$$\int_{-1}^1 x^k dx = 2 (c_0 x_0^k + c_1 x_1^k), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2 &= 2 (c_0 + c_1), & 0 &= 2 (c_0 x_0 + c_1 x_1), \\ \frac{2}{3} &= 2 (c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2), & 0 &= 2 (c_0 x_0^3 + c_1 x_1^3). \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Newton-Cotes / Gauß-Quadratur

- ▶ Newton-Cotes: **äquidistante** Stützstellen x_0, \dots, x_m
Idee: Integriere $P(f | x_0, \dots, x_m)(x)$.
- ▶ Gauß-Quadratur: **spezifisch gewählte** Stützstellen
Idee: Finde $x_0, \dots, x_m, c_0, \dots, c_m$, so dass I_m exakt für alle $Q \in \Pi_{2m+1}$.

Unterschiede

- ▶ Newton-Cotes: einfacher, Exaktheitsgrad m oder $m + 1$
- ▶ Gauß-Quadratur: Gewichte $c_j > 0$, Exaktheitsgrad $2m + 1$

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap 10.4-10.5

- ▶ Extrapolation und Romberg-Quadratur
- ▶ Integraltansformation
- ▶ Zweidimensionale Integrale

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie werden Integrale und Quadraturformeln transformiert?
- ▶ Wie werden zweidimensionale Integrale auf "einfachen" Gebieten approximiert?

Extrapolation und Romberg-Quadratur

Zu berechnen sei das Integral

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Die summierte Trapezformel $T(h)$ liefert Approximation der Ordnung h^2 .

Ziel: Numerische Approximation an $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = I$ mittels der Werte $T(h), T(h/2), T(h/4), \dots$ verbessern: **Extrapolation**

Grundlage: Asymptotische Entwicklung des Diskretisierungsfehlers:

$$T(h) - I = c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots + c_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}).$$

⇒ Euler-Maclaurinsche Summenformel

Extrapolation und Romberg-Quadratur

Hieraus erhält man

$$T\left(\frac{1}{2}h\right) - I = c_1 \frac{1}{4}h^2 + \hat{c}_2 h^4 + \dots + \hat{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

also

$$\left[\frac{4}{3}T\left(\frac{1}{2}h\right) - \frac{1}{3}T(h) \right] - I = \tilde{c}_1 h^4 + \dots + \tilde{c}_p h^{2p} + \mathcal{O}(h^{2p+2}).$$

Treiben wir diese Idee nun systematisch weiter.

Setzen dazu

$$T_1(h) = \frac{4T\left(\frac{1}{2}h\right) - T(h)}{3}.$$

Extrapolation und Romberg-Quadratur

Es gilt

$$T_1(h) - I = \tilde{c}_1 h^4 + \tilde{c}_2 h^6 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

und damit

$$T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - I = \tilde{c}_1 \frac{1}{16} h^4 + \tilde{c}_2 \frac{1}{64} h^6 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}),$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{16}{15} \left(T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - I \right) - \frac{1}{15} (T_1(h) - I) \\ &= \frac{16 T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - T_1(h)}{15} - I \\ &= d_1 h^6 + d_2 h^8 + \dots + \mathcal{O}(h^{2p+2}). \end{aligned}$$

Extrapolation und Romberg-Quadratur

Man erkennt, dass die Entwicklung des Fehlers der Quadraturformel

$$T_2(h) := \frac{16 T_1\left(\frac{1}{2}h\right) - T_1(h)}{15}$$

mit einem Glied der Ordnung h^6 beginnt.

Mit dieser Idee lassen sich weitere Approximationen der Ordnung h^8, h^{10}, \dots finden, vorausgesetzt f ist glatt genug.

Allgemeine Idee der Extrapolation

Der gesuchte Wert ist

$$T(0) = \int_a^b f(x) dx = I.$$

Bestimmt man das **lineare Interpolationspolynom** der Funktion

$$T(\sqrt{x}) = I + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_p x^p + \mathcal{O}(x^{p+1}),$$

zu den Punkten

$$(h^2, T(h)) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{4}h^2, T\left(\frac{1}{2}h\right) \right),$$

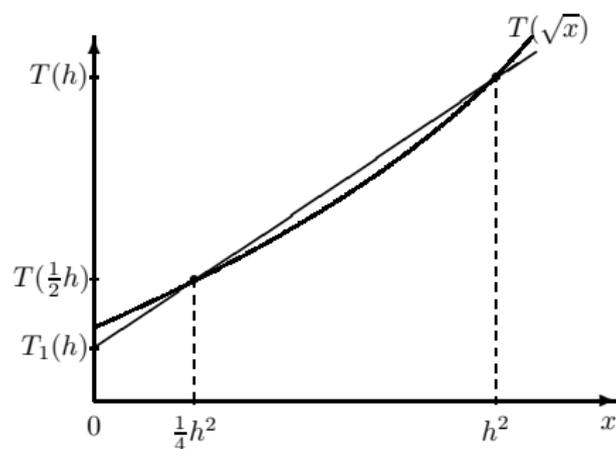
ergibt sich

$$P\left(T(\sqrt{\cdot}) \mid h^2, \frac{1}{4}h^2\right)(x) = T(h) + \frac{T\left(\frac{1}{2}h\right) - T(h)}{\frac{1}{4}h^2 - h^2}(x - h^2).$$

Allgemeine Idee der Extrapolation

Da man $T(0)$ annähern will, **extrapoliert** man an $x = 0$, d.h.

$$P\left(T(\sqrt{\cdot}) \mid h^2, \frac{1}{4}h^2\right)(0) = T(h) + \frac{4}{3}\left(T\left(\frac{1}{2}h\right) - T(h)\right) \\ = T_1(h).$$



Beispiel 10.9

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2$$

und $T(h)$ die zugehörige Trapezregel.

Die Extrapolation angewandt auf die Trapezregel liefert:

n	$T(h)$	$T_1(h)$ $= \frac{4}{3}T(h) - \frac{1}{3}T(2h)$	$ T_1(h) - I $
4	4.39692773		
8	4.38523920	4.38134302	6.93e-05
16	4.38226833	4.38127803	4.33e-06
32	4.38152257	4.38127398	2.70e-07

Erinnerung: $|T(h) - I| = 2.49e - 04$ für $n = 32$ (Beispiel 10.2).

Die Näherung $T_2(h)$ lässt sich wie $T_1(h)$ ebenfalls über [Extrapolation](#) erklären.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 & P \left(T(\sqrt{\cdot}) \mid h^2, \frac{1}{4}h^2, \frac{1}{16}h^2 \right) (0) \\
 &= \frac{-h^2}{\frac{1}{16}h^2 - h^2} P \left(T(\sqrt{\cdot}) \mid \frac{1}{4}h^2, \frac{1}{16}h^2 \right) (0) \\
 &\quad + \frac{\frac{1}{16}h^2}{\frac{1}{16}h^2 - h^2} P \left(T(\sqrt{\cdot}) \mid h^2, \frac{1}{4}h^2 \right) (0) \\
 &= \frac{16}{15} T_1 \left(\frac{1}{2}h \right) - \frac{1}{15} T_1(h) \\
 &= T_2(h).
 \end{aligned}$$

Allgemeine Vorgehensweise

Sei

$$T_{i,0} := T(2^{-i} h), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei h eine feste Anfangsschrittweite ist.

Es soll das Interpolationspolynom

$$P\left(T(\sqrt{\cdot}) \mid h^2, \dots, (2^{-k}h)^2\right)(x)$$

an der Stelle $x = 0$ ausgewertet werden.

Die Anwendung des Neville-Aitken Schemas um den Wert

$$T_k(h) = T_{k,k} = P\left(T(\sqrt{\cdot}) \mid h^2, \dots, (2^{-k}h)^2\right)(0)$$

zu berechnen, liefert

Romberg-Rekursion

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}, \quad j = 1, 2, \dots, i \geq j.$$

Romberg-Schema

Entsprechend dem Neville-Aitken-Schema ergibt sich das

Romberg-Schema

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & T_{i-1,j-1} & \searrow \frac{-1}{4^j-1} \\
 T(h) & = & T_{0,0} & & & & \\
 & & & \searrow & & T_{i,j-1} & \rightarrow T_{i,j} \\
 T(\frac{1}{2}h) & = & T_{1,0} & \rightarrow & T_{1,1} & & \frac{4^j}{4^j-1} \\
 & & & \searrow & & & \\
 T(\frac{1}{4}h) & = & T_{2,0} & \rightarrow & T_{2,1} & \rightarrow & T_{2,2} \\
 & & & \searrow & & \searrow & \\
 T(\frac{1}{8}h) & = & T_{3,0} & \rightarrow & T_{3,1} & \rightarrow & T_{3,2} & \rightarrow & T_{3,3} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Beispiel 10.10

Sei

$$I = \int_0^{\pi/2} x \cos x + e^x dx = \frac{\pi}{2} + e^{\frac{1}{2}\pi} - 2,$$

wie in Beispiel 10.2, und $T_{i,0} = T(2^{-i}h)$, wobei $T(\cdot)$ die Trapezregel ist.

Für die Anfangsschrittweite $h = \frac{1}{4}\pi$ ergibt das Romberg-Schema folgende Werte:

i	$T_{i,0}$	$T_{i,1}$	$T_{i,2}$	$T_{i,3}$
0	4.396927734684			
1	4.385239200472	4.381343022401		
2	4.382268326301	4.381278034910	4.381273702411	
3	4.381522565173	4.381273978130	4.381273707678	4.381273707762

Beispiel 10.10

Fehler:

i	$ I - T_{i,j} $			
0	1.57e-02			
1	3.97e-03	6.93e-05		
2	9.95e-04	4.33e-06	5.35e-09	
3	2.49e-04	2.70e-07	8.22e-11	1.42e-12

Integraltransformation

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Sei

$$I_1 = [a, b], \quad I_2 = [c, d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \rightarrow I_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung.

Es gilt die [Transformationsformel](#)

$$\int_{I_1} f(\psi(x)) |\psi'(x)| dx = \int_{I_2} f(y) dy.$$

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, falls ψ **affin** ist, d.h.

$$\hat{\psi} : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \hat{\psi}(x) = \frac{x-a}{b-a} d + \frac{b-x}{b-a} c.$$

Integraltransformation

Wenn

$$Q_m(g; I_1) = (b - a) \sum_{i=0}^m w_i g(x_i)$$

eine Formel zur Annäherung von

$$\int_a^b g(x) dx$$

ist, ergibt sich die entsprechende Formel für das Intervall $I_2 = [c, d]$:

$$\begin{aligned} \int_{I_2} f(y) dy &= \int_a^b f(\hat{\psi}(x)) |\hat{\psi}'(x)| dx \\ &= \frac{d - c}{b - a} \int_a^b f(\hat{\psi}(x)) dx \\ &\approx (d - c) \sum_{i=0}^m w_i f(\hat{\psi}(x_i)) \end{aligned}$$

Transformation von Quadraturformeln

Also insgesamt:

$$Q_m(g; I_1) = (b - a) \sum_{i=0}^m w_i g(x_i)$$

$$Q_m(f; I_2) = (d - c) \sum_{i=0}^m \hat{w}_i f(\hat{x}_i),$$

mit

$$\hat{w}_i = w_i,$$

$$\hat{x}_i = \frac{x_i - a}{b - a} d + \frac{b - x_i}{b - a} c.$$

Beispiel 10.11

Gauß-Quadraturformeln werden oft für das Intervall $[-1, 1]$ spezifiziert, z.B.

$$I_{[-1,1]}(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \left[\frac{1}{2} f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \right]$$

aus Beispiel 10.8.

Die entsprechende Formel für $[c, d]$ und $h := d - c$ lautet:

$$I_{[c,d]}(f) \approx \frac{h}{2} \left[f\left(c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) \right]$$

Beispiel 10.11

Analog kann man für die Gauß-Quadratur mit 4 Stützstellen

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \sum_{i=0}^3 w_i f(x_i),$$

mit

$$w_0 = w_3 = \frac{18 - \sqrt{30}}{72} \approx 0.173928,$$

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} - w_0,$$

$$-x_0 = x_3 = \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}} \approx 0.861136,$$

$$-x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}} \approx 0.339981,$$

eine Formel für ein beliebiges Intervall $[c, d]$ herleiten.

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Wir betrachten nun die Transformation eines **zweidimensionalen** Integrals

$$\int_B f(x, y) \, dx \, dy, \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei

$$B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\psi : B_1 \rightarrow B_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit Jacobi-Matrix

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}.$$

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Es gilt folgende **Transformationsformel**:

Satz 10.12

Falls $\det J(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in B_1$, so gilt

$$\int_{B_1} f(\psi(x, y)) |\det J(x, y)| dx dy = \int_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Für den Spezialfall, ψ **affin**, ergibt sich

$$\psi(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \det A \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^2,$$

$$|\det A| \int_{B_1} f \left(A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \right) dx dy = \int_{B_2} f(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Zweidimensionales Integral

Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann man, wie im eindimensionalen Fall, **eine Quadraturformel für einen Standardbereich** (z.B. Einheitsquadrat, Einheitsdreieck) in eine Formel für einen **affin-äquivalenten Bereich überführen**.

Wichtiger **Unterschied** zwischen ein- und mehrdimensionaler Integration:

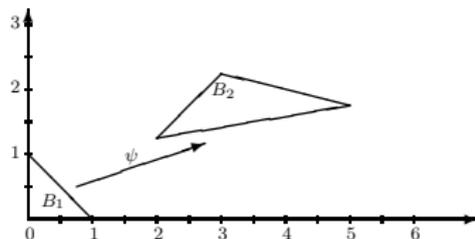
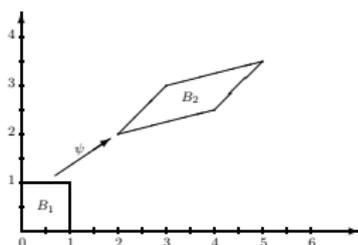
Zwei Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ lassen sich stets durch **affine** Transformationen aufeinander abbilden.

Hingegen ist es meistens **nicht** möglich, einfache Gebiete in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, durch eine **affine** Transformation ineinander zu überführen.

Beispiel 10.14. (Affine Transformationen)

Sei $B_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ das Einheitsquadrat.

Jede affine Abbildung bildet B_1 auf ein Parallelogramm ab.



Für das Einheitsdreieck gilt:

Jede affine Abbildung bildet es auf ein Dreieck ab.

Eine affine Abbildung von B_1 auf z.B. den Einheitskreis

$$S = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2) \leq 1\}$$

ist also nicht möglich.

Integration über dem Einheitsquadrat

Gesucht ist eine numerische Näherung für

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy.$$

Sei

$$F(y) := \int_0^1 f(x, y) \, dx,$$

und

$$Q_m(g) = \sum_{i=0}^m w_i g(x_i) \approx \int_0^1 g(x) \, dx$$

eine Quadraturformel für dieses **ein**dimensionale Integral.

Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^1 F(y) \, dy \\ &\approx \sum_{j=0}^m w_j F(x_j) \\ &= \sum_{j=0}^m w_j \int_0^1 f(x, x_j) \, dx \\ &\approx \sum_{j=0}^m w_j \sum_{i=0}^m w_i f(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i,j=0}^m w_i w_j f(x_i, x_j) =: Q_m^{(2)}(f).\end{aligned}$$

Beispiel 10.17

Sei

$$Q_1(g) = \frac{1}{2} g(x_0) + \frac{1}{2} g(x_1), \quad x_0 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad x_1 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

die **ein**dimensionale Gauß-Quadraturformel mit zwei Stützstellen für das Intervall $[0, 1]$, vgl. Beispiel 10.11.

Daraus ergibt sich die **Produktregel**

$$Q_1^{(2)}(f) = \frac{f(x_0, x_0) + f(x_0, x_1) + f(x_1, x_0) + f(x_1, x_1)}{4}$$

für den Bereich $[0, 1] \times [0, 1]$.

Diese Formel ist **exakt** für alle Linearkombinationen von Polynomen

$$x^{k_1} y^{k_2}, \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq 3$$

Integration über dem Einheitsdreieck

Für **Dreiecke** ist es zweckmäßig, von den Monomen

$$1, x, y, x^2, x y, y^2, \quad \text{usw.}$$

auszugehen und die Frage nach solchen Quadraturformeln zu stellen, die **alle Monome** der Form $x^{k_1} y^{k_2}$, $0 \leq k_1 + k_2 \leq M$ **exakt integrieren**.

Einige typische **Beispiele**:

$$(i) \quad Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(ii) \quad Q(f) = \frac{1}{6} [f(0, 0) + f(1, 0) + f(0, 1)]$$

Diese Beispiele haben den **Exaktheitsgrad 1**, d.h. die Polynome $1, x, y$ werden exakt integriert.

Integration über dem Einheitsdreieck

$$(iii) \quad Q(f) = \frac{1}{6} \left[f\left(\frac{1}{2}, 0\right) + f\left(0, \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]$$

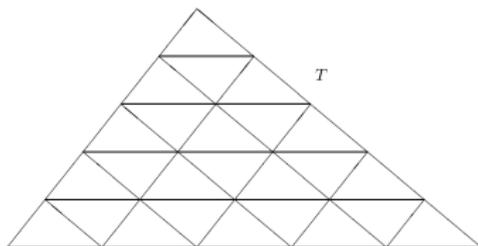
$$(iv) \quad Q(f) = \frac{1}{6} \left[f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right].$$

Die **Monome** $1, x, y, xy, x^2, y^2$ werden durch (iii), (iv) **exakt integriert**, d.h. der Exaktheitsgrad ist **2**.

Integration beliebiger Dreiecke:

- ▶ Unterteilung in kleinere kongruente Dreiecke
- ▶ Transformationsformel auf Einheitsdreieck

⇒ zusammengesetzte Quadraturformel



Zusammenfassung

- ▶ Approximation von $\lim_{h \rightarrow 0} T(h) = I$ mittels Extrapolation von $T(h), T(h/2), T(h/4), \dots \Rightarrow$ Romberg-Quadratur
- ▶ Transformation von Quadraturformeln mittels

$$\int_{I_1} f(\psi(x)) |\psi'(x)| dx = \int_{I_2} f(y) dy.$$

- ▶ Integration über dem Einheitsquadrat

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{i,j=0}^m w_i w_j f(x_i, x_j).$$

- ▶ Integration über dem Einheitsdreieck, z.B. über

$$Q(f) = \frac{1}{6} [f(\frac{1}{2}, 0) + f(0, \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$$

- ▶ Integration über beliebigen Recht-/Dreiecken mittels Transformations auf das Einheitsquadrat/dreieck

Verständnisfragen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, sowie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$.

f Sei $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [c, d]$ und $\psi : I_1 \rightarrow I_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$\int_{I_1} f(\psi(x)) |\psi'(x)| dx = \int_{I_2} f(y) dy.$$

w Aus jeder Quadraturformel für das Intervall $[a, b]$ mit Exaktheitsgrad m erhält man per Produktregel eine Quadraturformel für das Quadrat $[a, b]^2$ mit Exaktheitsgrad m .

Verständnisfragen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- f** Einfache Gebiete im \mathbb{R}^2 lassen sich durch affine Transformationen ineinander überführen.
- w** Die Quadraturformel $Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ für das Einheitsdreieck hat den Exaktheitsgrad 1.
- f** Mit der Quadraturformel $Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ kann das Polynom xy exakt integriert werden.